

ДЕЛОНЕ

531

Д-29

531

Д-29

КУРСЪ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ДЛЯ

ТЕХНИКОВЪ И ИНЖЕНЕРОВЪ.

СОСТАВИЛЪ

проф. Н. Б. Делоне.

2-ое исправленное изданіе.

Съ 168 фигурами въ текстъ.

КНИГА
ЧИТАЛЬНИ
ЗАЛА

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Изданіе К. Л. Риккера.

Невскій пр., № 14.

1913.

Риккеръ - механика

№ 4091

Берегите книгу

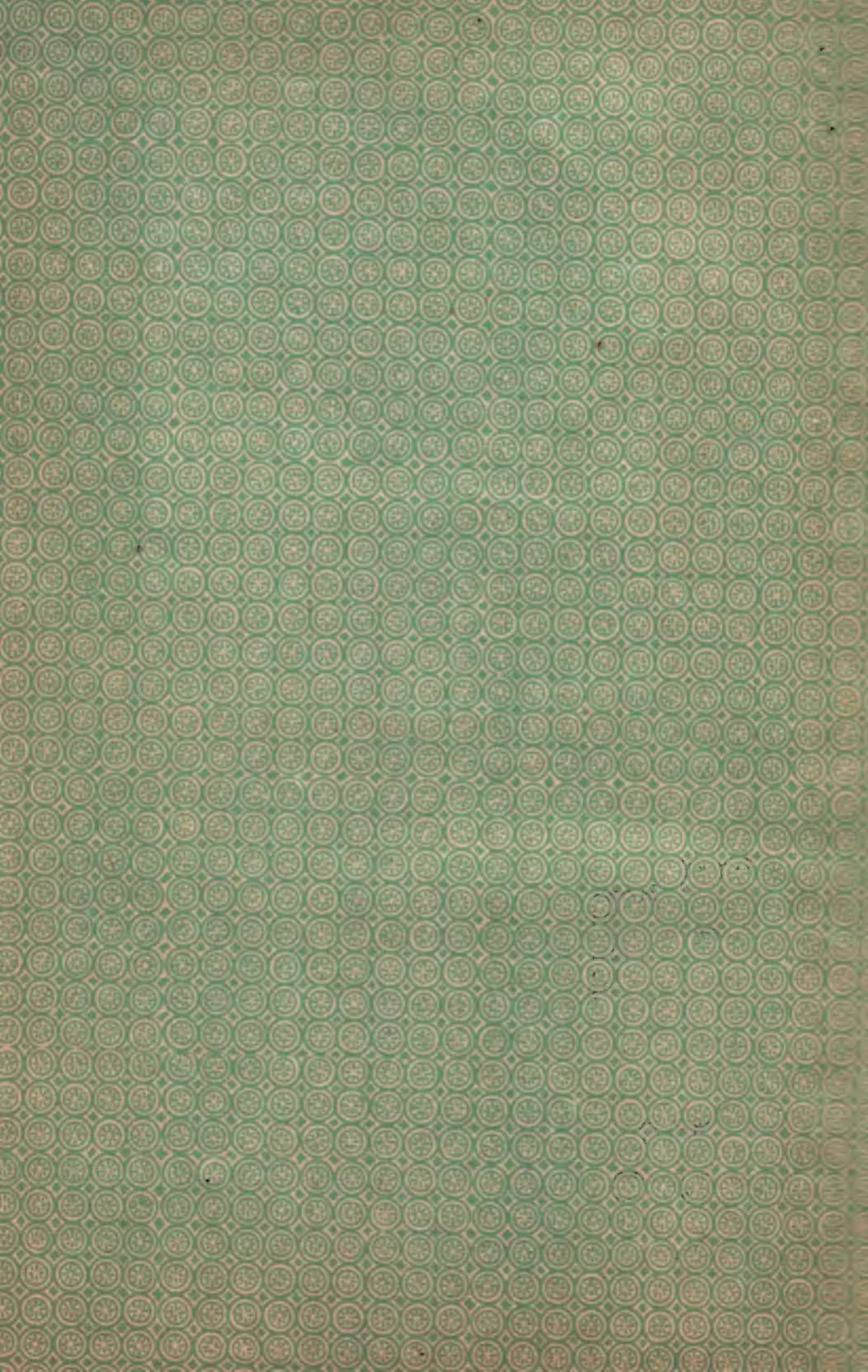
Не перегибайте книгу
во время чтения

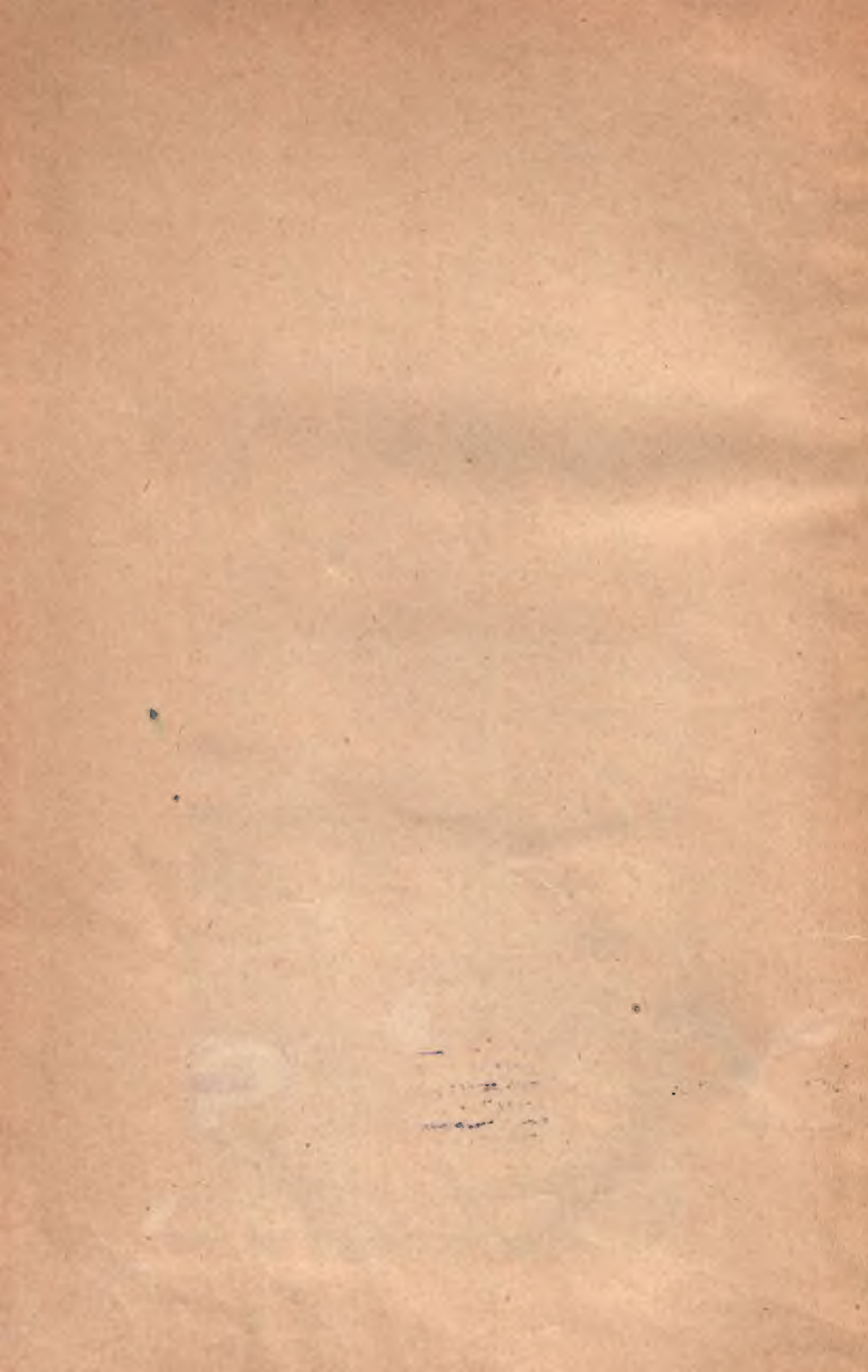
Не загибайте углов

Не делайте надписей на книге

Не смачивайте пальцев слюною
перелистывая книгу

Завертывайте книгу в бумагу.



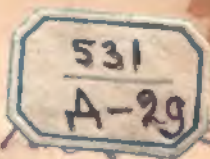


Проверено

531

Д 29

М. А. Курсы



КУРСЪ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ДЛЯ

ТЕХНИКОВЪ и ИНЖЕНЕРОВЪ.



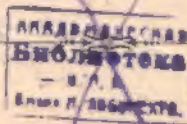
СОСТАВИЛЪ

проф. Н. Б. Делоне.

2-ое исправленное издание.

Съ 163 фигурами въ текстъ.

ПРОВЕРЕНО 1968 г.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Издание К. Л. Риккера.

Невскій пр., № 14.

1913.



КУРСЪ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
для
ТЕХНИКОВЪ И ИНЖЕНЕРОВЪ.

К. С. П.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МЕХАНИКА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

ОГЛАВЛЕНІЕ.

	СТР.		СТР.
ПРЕДИСЛОВІЕ	1		
ВВЕДЕНІЕ	2		
§§	СТР.	§§	СТР.
1. Опредѣленіе Теоретической Механики	3	3. Основные законы Ньютона	4
2. Значеніе теоретической механики въ изученіи природы	—	4. Однородность формулъ	5

ОТДѢЛЪ I.

Механика точки.

ГЛАВА I.

Прямолинейное движеніе точки.

5. Равноѣрно-прямолинейное движеніе точки	7	22. Единицы работы	18
6. Общее уравненіе равноѣрно-прямолинейнаго движенія точки	8	23. Живая сила	—
7. Прямолинейное движеніе съ переменною скоростью	9	24. Уравненіе живой силы	—
8. Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи	10	25. Уравненіе живой силы въ движеніи точки, падающей въ пустотѣ	—
9. Размѣръ ускоренія	—	26. Нѣкоторыя поясненія понятія «работа».	19
10. Сила	11	27. Мощность	20
11. Масса	—	28. Движеніе точки брошенной вверхъ въ пустотѣ	21
12. Абсолютныя единицы	12	21. Потенціальная функція	23
13. Размѣръ единицы силы	—	30. Законъ сохраненія живой силы	—
14. Сантиметръ—граммъ—секундная система единицъ	—	31. Законъ сохраненія энергіи	23
15. Ускореніе земного тяготѣнія. Вѣсъ	—	32. Гармоническое прямолинейное движеніе	25
16. Системы единицъ отличныя отъ абсолютной	13	33. Геометрическое представленіе прямолинейнаго гармоническаго движенія	27
17. Различныя типы задачъ на прямолинейное движеніе точки	—	34. Графическое изображеніе прямолинейно-гармоническаго движенія	28
18. Общій способъ рѣшенія задачъ 2-го типа	14	35. Кинетическая энергія гармоническаго движенія	29
19. Движеніе тяжелой точки, падающей въ пустотѣ	15	36. Потенціальная энергія гармоническаго движенія	—
20. Изслѣдованіе движенія тяжелой точки, падающей въ пустотѣ	16	37. Полная энергія гармоническаго движенія	30
21. Работа	17	38. Движеніе конца гибкаго прутка	—

ГЛАВА II.

Криволинейное движение точки.

§§	стр.	§§	стр.
39. Уравнение движения точки. Траектория	31	50. Ускорение и его направление въ равно- мѣрномъ движеніи точки по окруж- ности	40
40. Скорость въ криволинейномъ движеніи точки	32	51. Сила и ея проложенія на оси координ- нать	41
41. Изображеніе скорости векторами	—	52. Движеніе точки, брошенной въ пустотѣ наклонно къ горизонту	42
42. Проложенія скорости на ось координатъ	—	Центральныя движенія.	
43. Теорема о скоростяхъ проложеній	33	53. Общія свойства центральныхъ движеній	45
44. Опредѣленіе скорости движущейся точки по даннымъ уравненіямъ движенія	—	54. Законъ площадей	46
44a. Направленіе скорости въ криволиней- номъ движеніи точки	34	55. Скорость въ центральномъ движеніи	47
45. Ускореніе въ криволинейномъ движеніи точки	35	56. Сила въ центральномъ движеніи	48
46. Теорема о проложеніяхъ ускоренія	36	57. Кеплеровы законы	49
47. Центробежное и тангенціальное ускоренія	37	58. Законъ площадей характеризуетъ цент- ральное движеніе	—
48. Опредѣленіе ускоренія по даннымъ урав- неніямъ движенія	39	59. Выводъ закона ньютоновскаго притя- женія изъ законовъ Кеплера	51
49. Направленіе ускоренія	40		

ГЛАВА III.

Движеніе несвободной точки.

60. Несвободная точка	53	70. Выводъ изъ общаго условія (183), урав- неній равновѣсія точки, прикужен- ной оставаться на линіи	62
61. Движеніе точки по поверхности	54	71. Уравненія равновѣсія точки въ случаѣ силъ, выраженной неравенствомъ	63
62. Движеніе точки по линіи	57	72. Задача: найти положеніе равновѣсія тя- желой точки на сферѣ?	65
63. Равновѣсіе какъ частный случай дви- женія	—	73. Уравненія равновѣсія точки въ случаѣ двухъ силъ, выраженныхъ неравен- ствами	66
64. Равновѣсіе свободной точки	—	74. Начало Даламбера	—
65. Многоугольникъ силъ	58	75. Уравненія движенія несвободной точки, выводимыя изъ начала Даламбера	67
66. Равновѣсіе несвободной точки	59	76. Сохраненіе живой силы въ движеніи точки	68
67. Общее условіе равновѣсія, выводимое изъ начала возможныхъ перемѣненій	—	77. Математическій маятникъ	70
68. Выводъ уравненій равновѣсія свободной точки изъ общаго условія равновѣсія	61		
69. Выводъ изъ общаго условія (183), урав- неній равновѣсія точки, которая при- нуждена оставаться на поверхности	—		

ОТДѢЛЪ II.

Равновѣсіе неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Сложеніе силъ и паръ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

78. Измѣняемая система	73	81. Сложеніе двухъ параллельныхъ и направ- ленныхъ въ одну сторону силъ, дѣй- ствующихъ на неизмѣняемую систему	74
79. Перенесеніе точки приложенія силы	—	82. Центръ параллельныхъ силъ	75
80. Сложеніе такихъ, дѣйствующихъ на неиз- мѣняемую систему, силъ, продолженія которыхъ взаимно пересѣкаются въ одной точкѣ	74	83. Сложеніе двухъ силъ взаимно-параллель- но направленныхъ въ противоположныя стороны	77

§§	стр.	§§	стр.
74. Пара сил	77	88. Сложение пар, лежащих в плоскостях параллельных	80
75. Перенесение пар	78	89. Сложение пар, лежащих в пересечющихся плоскостях	81
76. Преобразование пар	79		
77. Общее заключение о парах	80		

ГЛАВА II.

Приведение сил, действующих на абсолютно твердое тѣло, къ простѣйшимъ системамъ силъ.

90. Общее замѣчаніе	81	97. Динама	85
91. Перенесение силъ	82	98. Теорема всякаго сложена силъ, действующая на неизмѣняемую систему, можетъ быть приведена къ динамѣ	86
92. Приведение къ одной силѣ и одной парѣ	—	99. Частные случаи приведения силъ, действующихъ на неизмѣняемую систему	—
93. Приведение къ двумъ непараллельнымъ и непересекающимся силамъ	—	100. Статические моменты	87
94. Аналитическое выраженіе приведения къ одной парѣ и одной силѣ	83	101. Статическій моментъ относительно точки	—
95. Центръ приведения	84	102. Статическій моментъ относительно оси	—
96. Теорема каковы бы ни были центръ приведенія, проекція момента. Уравновѣшанной пары на параллельно равнодѣйствующей силѣ P остается одной и той же для всѣхъ точекъ приведенія	85	103. Статическіе моменты относительно осей координатъ совокупности силъ, действующихъ на неизмѣняемую систему	88
		104. Удвоеніе представляемыхъ понатіемъ о статическомъ моментѣ	—

ГЛАВА III.

Условія равновѣсія неизмѣняемой системы.

105. Условіе равновѣсія свободной неизмѣняемой системы	89	108. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной вращаться около фиксированной оси Z и поступательно двигаться въ направленіи этой оси	90
106. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, вращающей одну неподвижную точку	—	109. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной двигаться только параллельно какой плоскости (xy)	—
107. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной только вращаться около некоторой оси	—	110. Прѣимѣръ	—

ГЛАВА IV.

О центрѣ тяжести.

111. Общая формула для предѣленія центра тяжести	91	120. Центръ тяжести объема тетраэдра	97
112. Центръ тяжести четверти конуса	—	121. Центръ тяжести многогранной пирамиды	—
113. Центръ тяжести дуги окружности	94	122. Центръ тяжести объема прямого круглаго конуса	98
114. Центръ тяжести полуокружности	95	123. Центръ тяжести боковой поверхности прямого круглаго конуса	—
115. Центръ тяжести площади треугольника	—	124. Теорема Гюльдена-Шалпуса о поверхности	—
116. Центръ тяжести круговаго сектора	96	125. Теорема Гюльдена-Шалпуса объ объемѣ	—
117. Центръ тяжести площади полукруга	—	126. Прѣимѣръ: поверхность и объемъ торъ	99
118. Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса	—		
119. Центръ тяжести поверхности полушарія	97		

ОТДѢЛЪ III.

Движеніе какой бы то ни было системы точекъ.

ГЛАВА I.

Общія уравненія механики.

§§	стр.	§§	стр.
127. Основная формула Лагранжа	100	129. Уравненіе Лагранжа въ 1-ой формѣ	102
128. Обобщеніе понятія о связяхъ	101		

ГЛАВА II.

Начало сохраненія движенія центра инерціи.

130. Дифференціальныя уравненія начала сохраненія движенія центра инерціи	103	132. Начало сохраненія движенія центра инерціи въ случаѣ отсутствія вѣщихъ силъ	106
131. Начало сохраненія движ. центра инерціи въ случаѣ существованія вѣщихъ силъ	104		

ГЛАВА III.

Начало сохраненія живой силы.

133. Начало сохраненія живой силы	107	138. Энергія	114
134. Уравненіе живой силы	100	139. Законъ сохраненія энергіи	116
135. Уравненіе сохраненія энергіи	110	140. Невозможность ретрэгресса mobile	117
136. Условія при которыхъ существуетъ локальная функція	111	141. Начало сохраненія живой силы примѣнимо только въ полнѣйшей совокупности дѣйствующихъ на систему силъ	119
137. Консервативная система	114		

ГЛАВА IV.

Начало сохраненія площадей.

142. Дифференціальныя уравненія начала сохраненія площадей	120	143. Начало сохраненія площадей	121
		144. Независимая плоскость	122

ГЛАВА V.

Движеніе системы подъ дѣйствіемъ мгновенныхъ силъ.

145. Количество движенія. Импульсъ силы	123
146. Дифференціальныя уравненія системы, на которую дѣйствуютъ одновременно нѣсколько мгновенныхъ силъ	124

ОТДѢЛЪ IV.

Механика неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Моменты инерціи неизмѣняемой системы.

147. Вращеніе неизмѣняемой системы около неподвижной оси	125	150. Соотношенія между моментами инерціи относительно взаимно пересѣкающихся осей	128
148. Моменты инерціи относительно оси	126	151. Главныя оси. Главные моменты инерціи	129
149. Соотношенія между моментами инерціи относительно взаимно перпендикулярныхъ осей	128	152. Главныя оси. Главные моменты инерціи	131

§§	стр	§§	стр
153. Моменты инерции параллелепипеда относительно его осей симметрии	131	155. Эллипсоид инерции параллелепипеда, относясь к концу его наименьшей оси симметрии	134
154. Центральные эллипсоиды инерции параллелепипеда	133	156. Моменты инерции прямого круга, цилиндра относительно его геометрической оси	135

ГЛАВА II.

Моменты инерции площадей.

157. Момент инерции площади	135	164. Момент инерции прямоугольника относительно его основания	139
157. Соотношение между моментами инерции площади относительно взаимно-параллельных осей	136	165. Момент инерции прямоугольника относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно одной из его сторон	—
159. Моменты инерции площади относительно осей, взаимно-пересекающихся	—	166. Момент инерции двутаврового сечения относительно оси, проходящей через его центр тяжести параллельно его основанию	—
160. Эллипсоид инерции	137	167. Момент инерции круга относительно диаметра	140
161. Момент инерции произвольного отрезка относительно оси, проведенной через конец его перпендикулярно отрезку	138	168. Значение момента инерции площади относительно осей по теории сопротивлений материалов	—
162. Момент инерции произвольного отрезка относительно оси перпендикулярной к нему и проходящей через его центр тяжести	—	169. Спарилл Ангелера для определения моментов инерции площадей	142
163. Момент инерции произвольного отрезка относительно какой-либо оси, лежащей в плоскости отрезка	139	170. Планиметр Ангелера	143

ГЛАВА III.

Общая свойства моментов инерции и нахождение их облегченными способами

171. Из отрезков пропорциональных моментам инерции A , B , C , т. е. относительно трех взаимно перпендикулярных осей всегда можно составить треугольник	145	179. Момент инерции эллиптической пластинки	147
172. Момент относительно точки	146	180. Момент инерции трехосного эллипсоида относительно одной из осей симметрии	148
173. Момент инерции относительно плоскости	—	181. Формулы моментов инерции, особенно часто встречающихся в практике	149
174. Сумма моментов инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей, пересекающихся в одной точке равна двойному полному моменту инерции относительно этой точки	—	182. Моменты инерции, выходящие дифференцированием	150
175. Момент инерции J поверхности сферы относительно диаметра	—	183. Гиацинтовый эллипсоид	—
176. Момент инерции плоской пластинки относительно оси перпендикулярной к ее плоскости равен сумм моментов инерции пластинки относительно двух взаимно перпендикулярных осей, лежащих в ее плоскости	—	184. Эллипсоид Леканара	151
177. Момент инерции J окружности относительно диаметра	—	185. Тела или системы равных моментов инерции	152
178. Радиус инерции	147	186. Момент инерции треугольной пластинки относительно прямой, проходящей через вершину	153
		187. Центральные эллипсоиды инерции g , g_1 и g_2 пластинки	155
		188. Эллипсоид инерции треугольной пластинки	156
		189. Аффинно-преобразование	—
		190. Эллипсоид инерции аффинно-преобразованной системы есть аффинно-преобразованный эллипсоид инерции данной системы	157
		191. Центральные эллипсоиды инерции параллелограмма	—

§§	стр.	§§	стр.
192. Найти систему 4-х точек, которая была бы системою равных моментов инерции по отношению данной системы	158	195. Силы инерции, вытекающие из уравнений предыдущего параграфа	161
193. Найти систему трех точек, характеризующую моменты инерции данной площади	159	196. Распределение главных осей инерции в плоскости	162
194. Условие, чтобы данная прямая была одною из главных осей для какой-нибудь точки	160	197. Распределение главных осей инерции в пространстве	164
		198. Поверхность равных главных моментов инерции	166

ГЛАВА IV.

Вращение твердого тела около оси.

199. Общее дифференциальное уравнение вращения твердого тела около оси	167	207. Давление на неподвижную ось вращения если тело и силы симметричны относительно плоскости, проходящей через ось и через центр тяжести	174
200. Общее дифференциальное уравнение движения твердого тела около горизонтальной оси	168	208. Давление на неподвижную ось вращения если тело и силы несимметричны относительно плоскости, проходящей через ось и через центр тяжести	180
201. Физический маятник	169	209. Исследование результатов §§ 207 и 208	182
202. Определение начального ускорения физического маятника	171	210. Перманентные оси вращения	183
203. Центр качения физического маятника	172	211. Начальная ось вращения, возникающая на покоящемся теле, имевшем одну неподвижную точку, при действии импульсивной пары	184
204. Продолжительность колебания физического маятника в зависимости от выноса центра тяжести	174	212. Центр удара	185
205. Маятник Карманыых часов	175	213. Баллистический маятник	186
206. Кинематические формулы вращения неподвижной системы около неподвижной оси	177		

ГЛАВА V.

Равновесие абсолютно твердых тел, между которыми существует трение.

214. Скольжение и катание	188	223. Прихвосты	192
215. Общее понятие о трении	—	224. Задача Максвелла	196
216. Законы трения скольжения	—		
217. Определение коэффициента трения скольжения	189	225. Трение, действующее по неизвестным направлениям	197
218. Пара трения при катании	190	226. Теорема Шалля. Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости равносильно скользя в другое может быть произведено бесчисленным множеством способов, во всяком можно достигнуть этого перемещения вращением фигуры около некоторой оси, называемой осью перемещения	198
219. Материальная точка находится на шероховатой плоской кривой под действием данной силы. Найти ее положение равновесия	—	227. Первый способ решения задачи на трении, напряжения которых не даны	198
220. Конусы трения	—	228. Второй способ решения задачи на трении по неопределяемым направлениям	199
221. Материальная точка находится на шероховатой кривой линией кривизны под действием данной силы. Найти ее положение равновесия	191		
222. Материальная точка находится на шероховатой поверхности под действием данной силы. Найти положение равновесия данной точки	—		

ГЛАВА VI.

Начало возможных перемещений.

§§	стр	§§	стр.
229. Общее выражение начала возможных перемещений	201	242. Введение новых условий, обращающих неопределенную статическую задачу в определенную	212
230. Приложение начала возможных перемещений къ теоріи рычага	202	243. Шарнирная ферма	313
231. Применение начала возможных перемещений въ практической механикѣ	203	244. Реакція стержня простой формы, на который не действуют вѣнныя силы	214
232. Доказательство начала возможных перемещений для свободного абсолютно твердаго тѣла	204	245. Реакція такого стержня простой формы, на который действуют вѣнныя силы	216
233. Доказательство теоремы обратной началу возможных перемещений для системы абсолютно твердыхъ тѣлъ	206	246. Нормальная деформация	219
234. Начальное движение системы	207	247. Теорема Лева	221
235. Координаты твердаго тѣла	208	248. Нормы	221
236. Независимыя координаты	—	249. Окружность устойчивости	222
237. Степени свободы системы	209	250. Радиус кривизны траекторіи, описываемой точкою подвижной фигуры	—
238. Максимумъ и минимумъ силовой функции	—	251. Геометрическій признакъ устойчивости или неустойчивости равновѣсія	223
239. Устойчивость равновѣсія системы	210	252. Наложение мгновеннаго центра в окружности устойчивости по даннымъ траекторіямъ двухъ точекъ подвижной фигуры и по положеніямъ этихъ точекъ на ихъ траекторіяхъ	224
240. Высоты центра тяжести, соответствующія равновѣсію	—	253. Равновѣсіе камня на камнѣ	226
241. Неопределенныя задачи	211		

ГЛАВА VII.

Общій случай движенія неизмѣняемой системы.

254. Ось перемѣщенія абсолютно твердаго тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку	228	266. Мера вращеній	—
255. Аксиомы	229	267. Перенесеніе вращенія на параллельную ось	237
256. Мгновенная ось	—	268. Приведенія данной системы вращеній къ простѣйшимъ системамъ	—
257. Движеніе свободного твердаго тѣла	230	269. Скорости точекъ твердаго тѣла, совершающаго какое либо движеніе въ пространстве	238
258. Параллельность осей вращенія для всѣхъ точекъ приведенія	—	270. Перенѣса центра вращенія	239
259. Равенство угловъ вращенія	—	271. Опредѣленіе безконечно-малого вѣнтоваго движенія твердаго тѣла по компонентамъ	240
260. Равенство проекцій перемѣщеній на ось вращенія	231	272. Варианты движенія твердаго тѣла	241
261. Великій поворотъ около оси можетъ быть составленъ изъ поворота около другой оси и поступательнаго перемѣщенія	—	273. Подвижная система осей координатъ	—
262. Центральная ось	232	274. Качественныя соотношенія между проложеніями вектора на подвижныя и на неподвижныя оси	242
263. Сложеніе безконечно малыхъ вращеній, происходящихъ около двухъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ	233	275. Эйлеровы дифференціальныя уравненія движенія абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки	245
264. Разложеніе безконечно малаго вращенія на три взаимно перпендикулярныя составляющія вращенія	235	276. Движеніе абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки изъ вліянія силъ, приложенныхъ влѣнюю къ этой точкѣ	246
265. Сложеніе безконечно малыхъ вращеній, происходящихъ около взаимно параллельныхъ осей	—	277. Интегрированіе уравненій движенія твердаго абсолютно твердаго тѣла по способу Кирхгофа	248

§§	стр.	§§	стр.
278. Моменты количества движения относительно неподвижных осей . . .	251	283. Аксиомы въ движ. тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести . . .	255
279. Моменты количества движения относительно главных центральных осей инерции . . .		284. Позолы . . .	256
280. Начало площадей въ движеніи тяжелаго абсолютно-твердаго тѣла около центра тяжести . . .	252	285. Геральдия . . .	258
281. Началъ сохранения живой силы въ движеніи тяжелаго абсолютно-твердаго тѣла, вращающагося около центра тяжести . . .	253	286. Устойчивость движенія около главных осей . . .	259
282. Геометрическое представленіе движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести . . .		287. Независимость вращательнаго движенія около центра тяжести . . .	
		288. Движеніе тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, motion не къ центрѣ тяжести . . .	260
		289. Аналитическое изслѣдованіе движенія абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки . . .	262
		— 290. Эйлеровы независимыя углы . . .	265

ОТДѢЛЪ V.

Относительное движеніе.

ГЛАВА I.

Относительное движеніе точки.

291. Движеніе точки по линіи, которая сама движется . . .	269	295. Подмываніе береговъ рѣкъ . . .	275
292. Скорости въ относительномъ движеніи точки . . .	270	296. Аналитическое изслѣдованіе относительнаго движенія . . .	276
293. Ускореніе абсолютнаго движенія. Тезисъ Короліуса . . .	—	297. Уравненія относительнаго движенія точки . . .	279
294. Сложное центробѣжное ускореніе . . .	273	298. Живилъ сила относительнаго движенія . . .	280
		299. Относительное равновѣсіе точки . . .	

ГЛАВА II.

Относительное движеніе и относительное равновѣсіе.

300. Общія соображенія . . .	282	303. Относительное движеніе на земной поверхности . . .	288
301. Одинъ изъ случаевъ, когда центробѣжныя силы приводятся къ одной равнодѣйствующей . . .		304. Маятникъ Фуко . . .	290
302. Относительное равновѣсіе телъ . . .	283	305. Гироскопы . . .	295

ОТДѢЛЪ VI.

Теорія притяженія.

ГЛАВА I.

Общія формулы притяжанія и притяженіе шаромъ.

306. Ньютоново притяженіе . . .	299	309. Притяженіе, оказываемое шаромъ на вѣшную точку . . .	304
307. Численное значеніе коэффициента притяженія . . .	300	310. Притяженіе шаромъ внутренней точки . . .	305
308. Общія формулы притяженія точки тѣломъ . . .	302	311. Притяженіе сферическимъ слоемъ точки, которую онъ окружаетъ . . .	306

ГЛАВА II.

Теорія потенціала.

§§	стр.	§§	стр.
312. Потенціалъ	306	323. Теорема Пуассона	315
313. Конкретное понятие о потенціалѣ, какъ о работѣ	308	324. Теорема Гаусса	316
314. Сила въ данной точкѣ	309	325. Формулы Грина	—
315. Силовые линіи	—	326. Теорема Грина объ эквивалентномъ слобѣ на какой-либо замкнутой поверх- ности	318
316. Поверхности уровня	—	327. Тѣлесный уголъ	320
317. Случай одной притягивающей точки	310	328. Теорема Грина объ эквивалентномъ сло- бѣ, лежащемъ на поверхности уровня	321
318. Случай двухъ притягивающихъ точекъ	—	329. Взаимный потенциалъ двухъ системъ	323
319. Силовыя трубки	311	330. Формула Грина, выраженная помощью взаимныхъ потенциаловъ	325
320. Силовой элементъ	—		
321. Теорема Остроградскаго	312		
322. Теорема Лапласа	313		

ОТДѢЛЪ VII.

Равновѣсіе гибкой нити.

ГЛАВА I.

Равновѣсіе свободной нити.

331. Цѣнная ланія	326	337. Уравненіе равновѣсія нити, подлѣ дѣй- ствіемъ какихъ бы то ни было силъ, въ перемѣнныхъ присущихъ задачъ	333
332. Свойства цѣнной ланія	328	338. Уравненіе равновѣсія гибкой нити, подлѣ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ, въ Декартовыхъ координатахъ	334
333. Равновѣсіе неоднородной нити	329		
334. Цѣпная ланія	330		
335. Параболическая нить	331		
336. Цѣнь равнаго сопротивленія	332		

ГЛАВА II.

Равновѣсіе нитей, принужденныхъ находится на данныхъ кривыхъ.

339. Равновѣсіе легкой нити на совершенно гладкой кривой	335	341. Равновѣсіе легкой нити на шерохова- той кривой	337
340. Равновѣсіе тяжелой нити на совершенно гладкой кривой	—	342. Равновѣсіе тяжелой нити на шерохова- той кривой	338

ГЛАВА III.

Равновѣсіе гибкой нити на поверхности.

343. Равновѣсіе гибкой нити на совершенно гладкой поверхности подлѣ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ	338	344. Уравненія равновѣсія нити, лежащей на поверхности въ перемѣнныхъ прису- щихъ задачъ	339
		345. Геодезическія линіи	340

ГЛАВА IV.

Равновѣсіе растяжимой гибкой нити.

§§	стр.	§§	стр.
346. Законъ Гука	341	348. Уравненіе растяжимой нити, подвѣшен-	
347. Равновѣсіе растяжимой нити, растяги-	342	вой въ двухъ точкахъ	343

ОТДѢЛЪ VII.

Равновѣсіе упругихъ стержней.

ГЛАВА I.

Растяженіе стержней.

349. Растяженіе вертикальнаго стержня, верхній конецъ котораго закрѣпленъ неподвижно	344
350. Теорія растяженія вращающаго стержня	—

ГЛАВА II.

Сгибаніе стержней.

351. Общие понятія о сгибаніи горизонталь-		356. Кривая балка подѣ влияніемъ силъ, зна-	
наго прямого стержня, заданнаго	347	чительно-измѣняющіхся форму	351
длины концами въ стѣну		357. Прямая балка изогнутаго изгибающаго	
352. Изогнутая балка, лежащая на двухъ		своемъ видѣ, лежащая на вѣсколенныхъ	
опорахъ подѣ дѣйствіемъ одного груза,		опорахъ подѣ дѣйствіемъ собственной	
подвѣшеннаго между опорами	348	тяжести	352
353. Изогнутая не изгибающаяся своего вида		358. Уравненія трехъ моментовъ	354
балка подѣ влияніемъ вѣсколенныхъ		359. Теорія балки, согнутой въ дугу окруж-	
поперечныхъ силъ	349	ности большого радиуса	355
354. Гибкая не изгибающаяся своего вида		360. Лукъ согнутый тѣтеномъ	358
балка подѣ влияніемъ вѣсколенныхъ		361. Тонкій вертикальный столбъ	359
поперечныхъ силъ	350	362. Работа сгибающаго момента L при сги-	
355. Кривая балка подѣ влияніемъ вѣско-		бании элемента dx	360
ленныхъ силъ, мало изгибающ. ея форму	—		

ГЛАВА III.

Крученіе.

363. Чѣмъ измѣняется крученіе	360	366. Соотношенія между изгибными и де-	
364. Продолженія кривизны	361	формациями	362
365. Подвижная система координатъ для из-		367. Вращающееся крученіе и сгибаніе	
сѣдованія крученія	362	стержня	364
		368. Спиральныя вращенія	365

ОТДѢЛЪ IX.

Основанія графической статистики.

§§	стр.	§§	стр.
69. Многоугольникъ силъ	369	373. Опредѣленіе давленій, производимыхъ прямою горизонтальною балкою на точки опоры	372
70. Веревочный многоугольникъ	—	374. Кривая давленій	373
371. Графическія условія равновѣсія	371		
72. Многоугольникъ параллельныхъ силъ	—		

ОТДѢЛЪ X.

Теорія удара и другихъ мгновенныхъ силъ.

ГЛАВА I.

Ударъ въ плоскомъ движеніи.

173. Общій видъ уравненій, опредѣляющихъ дѣйствіе удара	375	379. Уравненія удара совершенно неупругихъ и шарообразныхъ тѣлъ	382
74. Ударъ гладкихъ шаровъ	377	380. Уравненія удара совершенно неупругихъ и абсолютно гладкихъ тѣлъ	383
75. Блѣка подвѣшенная на оси, проходящей чрезъ ея центръ тяжести, ударяется абсолютно упругимъ шаромъ	378	381. Уравненія удара совершенно гладкихъ упругихъ тѣлъ	—
76. Законы тренія во время удара одинаковы съ законами тренія скользящаго. Опытъ Морена	380	382. Уравненія удара тѣлъ упругихъ и совершенно шарообразныхъ	384
		383. Изображающая точка	385
		384. Ударъ шара о стѣну	386

ГЛАВА II.

Общія теоремы о мгновенныхъ силахъ.

86. Общее уравненіе возможныхъ перемѣненій для мгновенныхъ силъ	391	387. 2-я теорема Карно	392
388. Теорема Карно	392	388. 3-я теорема Карно	393

ОТДѢЛЪ XI.

Общая теорія уравненій механики.

ГЛАВА I.

Уравненія Лагранжа во 2 ой формѣ.

89. Выраженія декартовыхъ координатъ чрезъ независимыя координаты	394	391. Элементарная работа ускорительныхъ силъ	396
90. Выраженія кинетической силы въ независимыхъ координатахъ	395	392. Уравненія Лагранжа во 2-й формѣ	397
		393. Движеніе тяжелой точки по сферѣ	398

ГЛАВА II.

Каноническія уравненія механики.

§§	СТР.
394. Взаимныя функции	400
395. Случай, въ которомъ T , есть однородная функция второго порядка	401
396. Каноническія уравненія механики	403
 Задачи	405—410
Рѣшенія задачъ	411—416

ПРЕДИСЛОВІЕ.

При составленіи настоящаго курса я имѣлъ въ виду двѣ цѣли: 1) дать студентамъ химическаго отдѣленія Варшавскаго Политехническаго Института, слушающимъ мои лекціи, печатный курсъ наиболее близкій къ тому, что я имъ читаю и 2) предоставить возможность болѣе широкой публикѣ пользоваться этимъ курсомъ, въ которомъ я обращаю особое вниманіе на равновѣсіе и движеніе твердаго тѣла.

По моему мнѣнію наилучшимъ руководствомъ для техника, изучающаго теоретическую механику, слѣдуетъ признать прекрасныя трактаты Раута (Routh), статика твердаго тѣла, въ двухъ томахъ (A treatise on analytical statics, 1890), и динамика твердаго тѣла, тоже въ двухъ томахъ (A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, 1892, или атласный переводъ подъ заглавіемъ Die Dynamik der Systeme starrer Körper). Эти книги Раута поражаютъ обширностью и широтой приложеннаго къ технике матеріала и выборомъ наиболее конкретныхъ задачъ, знаемыхъ до конца съ приниманіемъ во вниманіе тренія, сопротивленія среды, упругости и другихъ усложняющихъ задачу явленій.

Но дѣлать обязательнымъ для всѣхъ слушателей чтеніе Раута, даже если бы и существовалъ русскій переводъ его трактатовъ, я бы не рѣшилъ во первыхъ потому, что оба сочиненія Раута представляютъ собою четыре тома большаго формата и чтеніе такихъ многотомныхъ трактатовъ несовмѣстимо съ обремененностью студентовъ вашихъ высшихъ техническихъ учебныхъ заведеній учебными занятіями, во-вторыхъ Раутъ предполагаетъ уже знакомство читателя съ механикою точки и въ третьихъ въ который Раутъ облечаетъ свои формулы, значительно отличается отъ ряда классическихъ формулъ общепринятыхъ на континентѣ.

Поэтому въ настоящемъ курсѣ, пользуясь трактатами Раута, я имѣлъ въ виду читателя совершенно еще незнакомаго съ механикою, стараясь какъ мнѣ его съ классическими формулами и составить единый учебникъ.

При упомянутыхъ книгъ Раута я пользовался, при составленіи курса, еще слѣдующими сочиненіями:

Хвольсонъ. Курсъ физики, т. I, Спб. 1897.

Appell. Traite de mecanique rationnelle. Paris. 1896

Laurent. Traite de mecanique rationnelle. Paris. 1889.

Koppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig. 1899.

Boltzmann. Vorlesungen über die Principe der Mechanik. Leipzig. 1897.

Сидовскій. Курсъ теоретической механики. Учен. Запис. Имп. Москов. Унив. 1881).

Робинсонъ. Руководство къ курсу введенія въ теоретическую механику. Спб. 1890.

Житковскій. Элементарная теория гироскоповъ (Вѣстн. Опыт физ. и элемент. матем. Киевъ. 1888).

Thomson and Tait. Handbuch der theoretischen Physik (deutsche Uebersetz. v. Helmholtz und Weierstrass. 1875)

Принимую мою искреннюю благодарность издательской фирмѣ К. А. Риккера за собственное и въ видѣ добровольное отношеніе къ дѣлу предпринятаго ею изданія этой книги.

Н. Делоне.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Определеіе Теоретической Механики Теоретическая механика есть наука о движеніи.

Причины, производящія движеніе или влияющія на него, называются *силами*. Если силы два гравит. на гтью наперекоръ другъ другу такъ, что ихъ дѣйствія взаимно уничтожаютъ, т. е. тѣло находится въ *равновѣсѣ*. Поэтому и равновѣсѣ составляетъ предметъ, изучаемый въ теоретической механикѣ, какъ частный случай движенія.

Та часть теоретической механики, которая изучаетъ движеніе, не входя въ разсмотрѣніе производящихъ его силъ, называется *Кинематикой*.

Та часть теоретической механики, которая изучаетъ движеніе въ зависимости отъ производящихъ его силъ, называется *Кинетикой*.

Кинетика подраздѣляется въ свою очередь на *Статистику*, изучающую дѣль, равновѣсѣ и *Динамику*, изучающую движеніе.

Въ настоящемъ курсѣ мы не будемъ, однако, придерживаться этого раздѣленія, преслѣдуя возможную ежестотность изложенія.

Наука о движеніи можетъ быть основана на весьма небольшомъ количествѣ законовъ, выводимыхъ изъ опыта (три закона Ньютона см. § 3). Она можетъ быть равнина и этихъ законовъ строго математическимъ путемъ. Въ такомъ случаѣ, при вѣстутномъ проведеніи такого строгого метода, наука о движеніи называется *Аналитической* или *Рациональной механикой*.

Въ настоящемъ курсѣ излагается *Теоретическая механика*, допускающая въ некоторыхъ случаяхъ (например въ изученіи тренія) основанія на выведеніи изъ опытовъ, не вошедшихъ въ основныя законы чистой механики.

§ 2. Значеніе теоретической механики въ изученіи природы Съ развитіемъ естественныхъ наукъ все болѣе и болѣе крѣпнеть убѣжденіе въ то, что всѣ явленія неорганическаго мира и значительная часть явленій органической природы представляютъ собою результатъ движенія матеріи. Тѣплота, свѣтъ, электричество, магнетизмъ суть проявленія такого рода молекулярныхъ движеній или вѣсмой матеріи или эфира. Всѣ эти явленія взаимодѣйствія тоже подчинены чисто механическимъ за-

конамъ. Въ органической природѣ весьма многое сводится къ физикѣ и химии, хотя основной законъ развитія организмовъ—законъ наследственности — еще не приведенъ въ соотвѣтствіе съ какимъ либо движениемъ.

Отсюда вытекаетъ чрезвычайно важное значеніе теоретической механики въ ряду всего строя человѣческихъ знаній.

При изученіи природы человѣчество пользовалось до сихъ поръ методами, покоящимися на одной изъ трехъ основъ: 1) наблюденіе, 2) опытъ и 3) математика.

Наблюденіемъ совершающагося въ природѣ человѣкъ всегда занимался, но въ качествѣ основы научнаго метода наблюденіе было выставлено Аристотелемъ.

Въ *опытѣ* создается особая искусственная обстановка для выдѣленія фактовъ и процессовъ, подлежащихъ изученію. Отцомъ опытнаго (экспериментальнаго) метода признають Закона Верулэмскаго (1560—1616 г.).

Математика прилагается къ изученію природы болѣе всего чрезъ геометрію и особенно чрезъ механику.

Изучая движеніе, механика не можетъ обойтись безъ опыта, но, вѣдоуя ему, она стремится быть основанной на наименьшемъ числѣ положеній, данныхъ опытомъ. Поэтому, и по своему методу, механика занимаетъ какъ разъ переходное положеніе отъ чистой математики къ физикѣ, астрономіи и другимъ наукамъ болѣе экспериментальнаго и наблюдательнаго характера.

Рациональная механика довольствуется только самыми необходимыми числами и положеніями выводимыхъ изъ опыта, называемыхъ *основными законами механики*. Они могутъ быть сгруппированы различнымъ образомъ, но наиболее удачная ихъ группировка была дана Ньютономъ.

§ 3. Основные законы Ньютона. Въ своихъ *Philosophiæ Naturalis Principia mathematica* 1687 г. (Математическія основанія философіи природы) Ньютонъ высказалъ основные законы механики въ слѣдующей формѣ.

Законъ I. Каждое тѣло пребываетъ въ своемъ состояніи покоя или равномернаго прямолинейнаго движенія, если дѣйствующія на него силы не принуждаютъ его еще измѣнить такое состояніе.

Законъ II. Измѣненіе движенія пропорціонально приложенной дѣйствующей силѣ и происходитъ по той прямой линіи, по которой дѣйствуетъ сила.

Законъ III. Всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ противодѣйствіе равное и противоположное, то есть дѣйствія двухъ тѣлъ, одно на другое, всегда равны и направлены противоположно.

Ко второму закону Ньютонъ добавляетъ, въ видѣ слѣдствія, правило параллелограмма, согласно которому: дѣйствіе двухъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ и составляющихъ нѣкоторый уголъ, равносильно дѣйствію равно-

* (см. *Hertz*, Die Prinzipien der Mechanik, 1894 *Boltzmann*, Vorlesungen über die Principe der Mechanik, 1897.

твующей равной, по величинѣ и по направленію, дѣи вали параллельна, построеннаго на данныхъ составляющихъ силахъ.

Эти законы представляють собою выводъ изъ всѣхъ извѣстныхъ опытовъ и наблюдений.

§ 4. Однородность формулъ. Въ механикѣ приходится имѣть дѣло съ величинами разныхъ измѣреній, длины, времени, массы, площади, объема, числа, и т. д. Необходимо обезпечить себя отъ возможности ошибокъ, которыя могутъ произойти отъ неправильнаго пониманія формулъ.

Прежде всего важно помнить, что *какое слагаемое должно быть однородно* въ томъ смыслѣ, что обѣ его части должны быть выражаемы въ одинаковыхъ единицахъ.

Напримѣръ такое уравненіе

$$p = ab + c + 3 + abc$$

въ которомъ p объемъ, a , b — длины, 3 — отвлеченное число, — не имѣть никакого смысла. Такое же уравненіе

$$r = s \cdot a + abc$$

также возможно, если p объемъ, a , b , c длины, s площадь, потому что $s \cdot a$ имѣетъ, по отношенію къ длинѣ, лѣвая часть 3-го измѣренія, abc тоже 3-го измѣренія.

Возьмемъ еще примѣръ изъ геометріи. Извѣстно, что площадь P прямоугольника измѣряется произведеніемъ его основанія a на высоту b . Конечно это выражается такъ

$$P = ab \dots \dots \dots (1)$$

Результатъ однако будетъ невѣренъ, если при основаніи равномъ 21 сантиметрамъ и высотѣ равной 24 сантиметрамъ, мы, для опредѣленія площади помножимъ 5 на 25. Оны будутъ даже нехлѣбъ, оставляя полное сомнѣніе относительно того, въ какихъ мѣрахъ выражена площадь.

Формулу (1) надо понимать такъ: площадь прямоугольника содержитъ такое число единицъ площади, которое равно произведенію числа единицъ длины, содержащихся въ основаніи, на число *той же* единицъ длины, содержащихся въ высотѣ.

Для избѣжанія ошибокъ, особенно въ числовыхъ задачахъ, удобно пользоваться болѣе полнымъ обозначеніемъ, въ которомъ единицы этихъ измѣреній вводятся явно. Въ этомъ обозначеніи, напримѣръ, 5 мѣтровъ выражается произведеніемъ

$$5 \cdot [\text{метр}]$$

т. е. числа 5 на единицу длины «метр».

Въ такомъ «полномъ» обозначеніи формула (1) можетъ быть выражена такъ: между числомъ p единицъ площади, заключающихся въ прямоугольнике P числомъ a единицъ длины, заключающихся въ его осно-

вании a и числомъ 3 единицъ длины, заключающихся въ его высотѣ b , должно быть соотношеніе.

$$p \cdot [\text{единица площади}] = 3 \cdot [\text{единица длины}] \cdot 3 \cdot [\text{единица длины}] \\ = 3 \cdot 3 [\text{единица длины}]^2 \\ = 9 [\text{единица площади}]$$

или

$$p = 9$$

гдѣ

$$P = p [\text{единица площади}]$$

$$a = 3 [\text{единица длины}]$$

$$b = 3 [\text{единица длины}]$$

Въ приложеніи къ численному примѣру прямоугольника, имѣющаго основаніе 5 метровъ и высоту 24 сантиметра это можетъ быть выражено такъ:

$$P = p [\text{квадр. метръ}]$$

$$a = 5 [\text{метръ}]$$

$$b = 0,24 [\text{метръ}]$$

$$P = p [\text{квадр. метръ}] = 5 \cdot 0,24 [\text{метръ}]^2 = 1,2 [\text{квадр. метръ}]$$

$$p = 1,2$$

$$P = 1,2 \text{ квадратныхъ метровъ.}$$

Можно опредѣлять площадь P иначе, наприимѣръ въ квадратныхъ сантиметрахъ такъ:

$$P = p' [\text{квадр. сантиметръ}]$$

$$a = 500 [\text{сантиметръ}]$$

$$b = 24 [\text{сантиметръ}]$$

$$P = p' [\text{квадр. сантим.}] = 500 \cdot 24 [\text{сантим.}]^2 = 12000 [\text{квадр. сантим.}]$$

$$p' = 12000$$

$$P = 12000 \text{ квадрат. сантим.}$$

Эт обозначеніе въ особенности повалобится намъ при опредѣленіи размѣровъ различныхъ единицъ по отношенію къ основнымъ единицамъ. Пока мы знаемъ изъ геометріи, что

$$\text{размѣръ 1 площади} = [\text{единица длины}]^2$$

$$\text{размѣръ 1 объема} = [\text{единица длины}]^3$$

Единицы площади и объема по отношенію къ основной единицѣ длины называются *сложными* единицами. Въ механикѣ гораздо больше сложныхъ единицъ, чѣмъ въ геометріи, и полное обозначеніе ни гдѣ оббесчачаетъ дѣло, хотя большую часть формулъ мы будемъ представлять въ обыкновенномъ обозначеніи.

ОТДѢЛЪ I.

Механика точки.

Движеніе тѣла вполне опредѣлено, если извѣстно движеніе каждой его точки. Поэтому мы рассмотримъ прежде всего движеніе точки и начнемъ съ прямолинейнаго движенія точки.

ГЛАВА I.

Прямолинейное движеніе точки.

§ 5. **Равноѣрно-прямолинейное движеніе точки.** По первому закону Ньютона бесконечно малая частица матеріи, которую мы будемъ называть *материальной точкой*, при отсутствіи какихъ бы то ни было силъ, дѣйствующихъ на нее, бы дѣйствовала, движется равноѣрно прямолинейно. Рассмотримъ такое движеніе.

Равноѣрно-прямолинейнымъ движеніемъ называется такое движеніе, при которомъ материальная точка въ равные промежутки времени проходитъ равные прямолинейные пути.

Отсюда выводимъ слѣдующее. Если примемъ прямую, по которой движется, которую описываетъ, точка, за ось *иксовъ*, выберемъ на этой прямой какое-нибудь начало *о*, условимся изрѣдѣлять положеніе движущейся точки на этой прямой расстоянїемъ ея *x* отъ начала *о* и условимся относить, въ какую сторону отъ *о* считать эти расстоянія: положимъ и въ какую отрицательную, то путь *x* — *x*₀ — *х*, проходимый точкой теченіи промежутка времени *t* — *t*₀, пропорціоналенъ въ равноѣрно-прямолинейномъ движеніи этому промежутку, такъ что:

$$x - x_0 = v(t - t_0) \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ *v* — постоянная величина.

Откуда

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0} \dots \dots \dots (2)$$

т. е. *v* — приращеніе пути *x* — *x*₀ ко времени *t* — *t*₀, въ теченіи кото-

Уравнения, связывающія подобно уравненію (3) координаты точки со временемъ, называются уравненіями движенія.

Всѣ обстоятельства движенія и положенія точки въ каждый данный моментъ вполнѣ определяются уравненіями движенія.

Примѣръ. Определить скорость, начальное положеніе точки и положеніе ея въ концѣ 10-й секунды, послѣ прохожденія чрезъ начальное положеніе, въ движеніи, уравненіе котораго таково:

$$x = 3 \frac{[\text{метрѣ}]}{[\text{секунда}]} \cdot t + 5 [\text{метрѣ}]$$

отвѣтъ:

$$\text{скорость } v = 3 \frac{[\text{метрѣ}]}{[\text{секунда}]} = 3 \text{ метра въ секунду.}$$

Начальное положеніе находится на разстояніи 5 метровъ, въ положительную сторону, отъ начала координатъ.

Точка движется въ сторону вѣтра такъ какъ положительныхъ чиселъ. Въ концѣ 10-й секунды она находится на разстояніи отъ начала координатъ равномъ:

$$= 3 \frac{[\text{метрѣ}]}{[\text{секунда}]} \cdot 10 [\text{секунда}] + 5 [\text{метрѣ}] = (3 \cdot 10 + 5) \text{ метрѣ} = 35 \text{ метр.}$$

§ 7. Прямолинейное движеніе съ переменною скоростью. Подъ дѣйствіемъ тѣхъ, матеріальныхъ точка можетъ двигаться неравномѣрно, то есть съ измѣняющеюся скоростью. По 2 му закону Ньютона направление измѣненія движенія совпадаетъ съ направлениемъ силы. Если сила направлена въ теченіи всего движенія по данной прямой, то и направленіе движенія будетъ направлено въ каждый данный моментъ по той прямой (которую мы примемъ за ось координатъ). Точка поэтому не сойдетъ съ этой прямой, и измѣненіе движенія будетъ состоять только въ измѣненіи быстроты ея. Такимъ образомъ получается *прямолинейное движеніе съ переменною скоростью*, то называется, что слѣдуетъ называть скоростью такого движенія.

Отвѣтъ на это дать общіе принципы дифференціального исчисленія. Движеніе есть явленіе подчиненное законамъ непрерывности. Мы рассмотримъ только такія движенія, въ которыхъ скорость не мѣняется внезапно, а лишь постепенно. Поэтому прямолинейное движеніе съ *переменною скоростью* можетъ быть разсматриваемо состоящимъ изъ ряда последовательныхъ безконечно малыхъ *равномѣрно-прямолинейныхъ* движеній. Взявши весьма малаго времени Δt всякое движеніе почти равномѣрно, поэтому чего отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ на зываемое *среднею скоростью*, довольно близко извѣрять быстроту движенія въ теченіи времени Δt . Средняя скорость зависитъ однако не только отъ t , но и отъ Δt . Но предѣлъ къ которому стремится отношеніе $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при уменьшеніи промежутка Δt , есть только отъ t . Этотъ предѣлъ и называютъ скоростью точки въ

тотъ моментъ, до котораго пр текло время t отъ начала времени. Итакъ: скорость какого бы ни *на* была *прямолінійнаго* движенія выражается производною,

$$\frac{dx}{dt} \dots \dots \dots (4)$$

отъ пути по времени.

Поэтому, если движеніе дано уравненіемъ

$$x = f(t) \dots \dots \dots (5)$$

то скорость v будетъ выражаться формулою

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t) \dots \dots \dots (6)$$

§ 8. Ускореніе въ прямолинейномъ движеніи. Положимъ, что въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt скорость увеличилась на dv , такъ что v обратилась въ $v + dv$. Тогда, на основаніи формулы (6), имѣемъ:

$$dv = d\left(\frac{dx}{dt}\right) = f''(t) \cdot dt \dots \dots \dots (7)$$

Такое приращеніе получаетъ скорость v въ теченіи промежутка dt . Если бы точка двигалась затѣмъ съ тѣмъ же приращеніемъ dv скорости въ каждое слѣдующее dt , то въ единицу времени скорость получила бы приращеніе

$$\frac{dv}{dt} = f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \dots \dots \dots (8)$$

Эта величина, равная приращенію скорости, отнесенному къ единицѣ времени, называется *ускореніемъ*. Мы будемъ обозначать ускореніе буквою j .

Итакъ:

$$j = \frac{dv}{dt} = f''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \dots \dots \dots (9)$$

Ускореніе измѣряется *перво производною отъ скорости по времени или второю производною отъ пути по времени*.

Ускореніе и есть то самое, что Ньютонъ называлъ *измѣненіемъ движенія*.

§ 9. Размѣръ ускоренія. Мы знаемъ изъ § 6-го, что размѣръ единицы скорости таковъ:

$$\frac{[\text{единица длины}]}{[\text{единица времени}]}$$

Изъ (9) видно, что ускореніе измѣряется отношеніемъ $\frac{dv}{dt}$ (слѣдовательно размѣръ единицы ускоренія таковъ

$$\frac{[\text{единица длины}]}{[\text{единица времени}]}$$

§ 10. Сила. По второму основному закону Ньютона (§ 3) изменение движения, то есть ускорение j , пропорционально силе действующей на материальную точку.

Следовательно и наоборот, сила P , действующая по направлению движения, пропорциональна ускорению j , то есть:

$$P = mj \dots \dots \dots (10)$$

где m некоторое постоянное, называемое массой. Итак, сила выражается произведением массы на ускорение.

Силы, действующие по направлению осей координат, мы будем обозначать большими буквами, соответствующими названиям осей. Тогда, согласно (9) и (10), имеем:

$$X = mj \dots \dots \dots (10a)$$

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} \dots \dots \dots (11)$$

или

$$X = m \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (12)$$

Уравнения (11) и (12) называются дифференциальными уравнениями прямолинейного движения.

§ 11. Масса. Наблюдение и опыты (например опыты на Атвудовой машине), показывают, что для одинакового того же ускорения требуется та же большая сила, чѣмъ больше материя заключенная въ тѣлѣ. Но уравненіе (9) показываетъ, что для возбужденія того же ускоренія j нужна та же большая сила P , чѣмъ больше масса m . Следовательно масса представляет собою величину измѣряющую количество матеріи. Изъ первыхъ законовъ Ньютона видно, что матерія обладает способностью являться измѣненію движенія. Эта способность называется инерціею. Она выражает инерцію матеріи. Инерція это основное свойство ма-

теріи. Избѣжаніе недоразумѣній замѣтимъ тутъ же слѣдующее. Всякія тѣла, легкія и тяжёлыя, падаютъ въ давней мѣстности на горизонтальной поверхности, въ пустотѣ, съ одинаковымъ ускореніемъ, именно по той причинѣ, что чѣмъ тяжёле тѣло, тѣмъ больше его масса m , но зато во столько же разъ и въсь его, то есть действующая на него сила, больше, чѣмъ въ формулѣ (9) увеличимъ въ одинаковое число n разъ силу массу m , то получимъ:

$$Pn = mnj,$$

гдѣ j опредѣлится тою же величиною

$$j = \frac{P}{m}$$

изъ (9).

§ 12. Абсолютныя единицы. За основныя единицы принимаются: единица длины, единица времени и единица массы. Изъ этихъ единицъ составляются сложныя единицы, подобно тому какъ мы уже составляли единицы скорости и ускорения изъ единицъ длины и времени. Такая система единицъ называется *абсолютною*.

Въ дальнейшемъ изложеніи мы примемъ слѣдующія обозначенія

$$\begin{aligned}[L] &= [\text{единица длины}] \\ [T] &= [\text{единица времени}] \\ [M] &= [\text{единица массы}].\end{aligned}$$

Тогда, согласно сказанному въ §§ 5 и 9, получимъ

$$\begin{aligned}[\text{единица скорости}] &= \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}] \\ [\text{единица ускорения}] &= \frac{[L]}{[T]^2} = [LT^{-2}]\end{aligned}$$

§ 13. Размѣръ единицы силы. Согласно такому обозначенію и формулѣ (9) заключаемъ, что размѣръ единицы силы таковъ

$$[\text{единица силы}] = [MLT^{-2}].$$

Если за основныя единицы приняты $[L]$, $[T]$ и $[M]$, то за единицу силы мы *должны* уже принять такую силу, которая, действуя на единицу массы, производитъ единицу ускоренія.

§ 14. Сантиметръ—граммъ—секундная система единицъ. Въ современной физикѣ получила широкое распространение такая абсолютная система единицъ, въ которой

$$\begin{aligned}[L] &= [\text{сантиметръ}] \\ [T] &= [\text{секунда}] \\ [M] &= [\text{граммъ}] = \text{масса содержащихся въ 1 граммѣ вещества}.\end{aligned}$$

Эта система называется *С. Г. С.* система абсолютныхъ единицъ. Изъ основныхъ единицъ образуются сложныя

$$[\text{единица скорости}] = [LT^{-1}] = \text{скорость точки, проходящей равномерно 1 сантиметръ въ 1 секунду.}$$

$$[\text{единица ускорения}] = [LT^{-2}] = \text{ускореніе такого движенія, при которомъ въ 1 секунду скорость увеличивается на единицу скорости.}$$

$$[\text{единица силы}] = [MLT^{-2}] = \text{сила, подъ влияніемъ которой масса 1 граммъ приобретаетъ ускореніе, равное единицѣ.}$$

Эта единица силы называется *динъ*. Въсь одного грамма равенъ 981 дину.

§ 15. Ускореніе земного тяготѣнія. Въсь. Ускореніе, производимое силою тяжести на земной поверхности въ различныхъ мѣстностяхъ раз-

лично, но ускорение въ одной мѣстности мало отличается отъ ускорения въ другой. Въ среднемъ оно равно 9,81 единицъ ускорения *) и обозначается чрезъ g . Слѣдовательно *вѣсъ* p тѣла, то есть именно сила возбуждающая ускорение g , связана съ массой тѣла, согласно (9), такою формулою:

$$p = mg \dots \dots \dots (13)$$

гдѣ
$$g = 9,81 \frac{[\text{сантиметръ}]}{[\text{секунда}]^2} = 9,81 \frac{[\text{метръ}]}{[\text{секунда}]^2}.$$

§ 16. Системы единицъ отличныя отъ абсолютной. Иногда, напримѣръ въ практической механикѣ, принимаютъ за основныя единицы, единицу длины 1 метръ, единицу времени 1 секунду, единицу силы вѣсъ 1-го килограмма. Тогда уже масса тѣла определяется изъ (13) такъ

$$m = \frac{p}{9,81} \dots \dots \dots (14)$$

гдѣ p число килограммовъ, единица массы = масса содержащаяся въ килограммѣ $\frac{1}{9,81}$.

Изъ этого примѣра видно, что выборъ единицъ есть дѣло условное, но необходимо ихъ выбирать такъ, чтобы уравненія, связывающія различныя величины, удовлетворялись. Такъ въ примѣрѣ настоящаго параграфа можно было произвольно выбрать двѣ единицы (длины и силы), но тогда третья единица (массы) должна быть выбрана уже такъ, чтобы уравненіе (14) удовлетворялось.

§ 17. Различныя типы задачъ на прямолинейное движеніе точки. При изслѣдованіи прямолинейнаго движенія точки встречаются задачи главнѣйшимъ образомъ двухъ типовъ: 1) По данному уравненію движенія определить скорость, ускореніе и силу, производящую это движеніе. 2) По тангой силѣ найти ускореніе, скорость и уравненіе движенія.

Задачи 1-го типа рѣшаются весьма просто дифференцированиемъ. Рѣшеніе это можетъ быть представлено въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ.

Дано уравненіе прямолинейнаго движенія по оси x ось

$$x = f(t) \dots \dots \dots (15)$$

Отсюда по (6) получаемъ дифференцированиемъ скорость

$$v = f'(t) \dots \dots \dots (16)$$

Дифференцируя еще разъ, получимъ по (8) ускореніе

$$j = f''(t) \dots \dots \dots (17)$$

Помножая на массу, получимъ по (11) силу

$$X = mf''(t) \dots \dots \dots (18)$$

* Сила тяжести увеличиваетъ скорость падающаго тѣла въ каждую секунду на величину, равную 9,81 сантиметръ въ секунду.

Примѣръ I. Опреѣлѣть скорость, ускореніе и силу въ прямолинейномъ движеніи, выраженномъ уравненіемъ

$$x = at^3 + bt^2 + ct + h$$

Находимъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = 3at^2 + 2bt + c$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = 6at + 2b$$

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = m(6at + 2b).$$

Оказывается, что въ этомъ движеніи сила X съ теченіемъ времени измѣняется.

Примѣръ II. Опреѣлѣть скорость, ускореніе и силу въ прямолинейномъ движеніи

$$x = at^2 + bt + c.$$

Находимъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2at + b$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = 2a$$

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} = 2am.$$

Здѣсь сила, дѣйствующая на тѣло, оказывается величиною постоянною.

Перейдемъ къ задачамъ 2-го типа, рѣшающимся интегрированіемъ и рассмотримъ прежде всего такую задачу, которая сама по себѣ имѣетъ болѣе значеніе. На этихъ задачахъ мы познакомимся еще съ некоторыми основными понятіями механики.

§ 18. Общий способъ рѣшенія задачъ 2-го типа. Задачи 2-го типа, то есть такая, въ которыхъ по данной силѣ X ищется ускореніе, скорость и уравненіе движенія, рѣшаются интегрированіемъ дифференціальнаго уравненія движенія:

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \dots \quad (19)$$

и именно ускореніе находится, согласно (10a), по формулѣ

$$j = \frac{X}{m} \quad \dots \quad (20)$$

Затѣмъ по формулѣ (9) и (20) имѣемъ

$$\frac{X}{m} = \frac{dv}{dt} \quad \dots \quad (21)$$

Интегрируя это уравненіе, получаемъ скорость v .

Далѣе по (6):

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \dots \quad (22)$$

Интеграция введет произвольное постоянное c_1 . По интегрировании получим:

$$\frac{gt^2}{2} + c_1 = x \quad \dots \quad (29)$$

Определим c_1 из начальных данных. При $t=0$ точка находится в начале 0, следовательно $x=0$ при $t=0$. Вставляя въ (29), получим:

$$\frac{g \cdot 0}{2} + c_1 = 0,$$

откуда:

$$c_1 = 0.$$

Следовательно (29) имеет вид:

$$x = \frac{gt^2}{2} \quad \dots \quad (30)$$

Это и есть искомое уравнение движения.

Задача, как и всякая задача этого типа, потребовала двух интегрирований. Каждое интегрирование ввело произвольная постоянная, которые определены были из начальных данных. Ускорение въ этомъ движении есть величина постоянная $g = 981$ сантиметръ, [секунда]. Скорость, какъ это видно изъ (28), пропорциональна времени. Такое движение называется *равномерно-ускореннымъ*.

§ 20. Изслѣдованіе движенія тяжелой точки, падающей въ пустотѣ

Изъ уравненія (30) находимъ, что пути, проходимые точкой отъ начала координатъ, будутъ *)

въ концѣ 1-ой секунды	$x_1 = \frac{981 \cdot 1^2}{2} = 490,5$	сантиметровъ =	$\frac{9}{2}$
» 2-ой »	$x_2 = \frac{981 \cdot 2^2}{2} = 1962$	»	$\frac{9 \cdot 4}{2}$
» 3-ей »	$x_3 = \frac{981 \cdot 3^2}{2} = 4414,5$	»	$\frac{9 \cdot 9}{2}$
» 4-ой »	$x_4 = \frac{981 \cdot 4^2}{2} = 7848$	»	$\frac{9 \cdot 16}{2}$
.....

Следовательно:

въ теченіи 1-ой секунды точка проходитъ	$x_1 = 490,5$	сантиметр. =	$\frac{9}{2}$
» 2-ой » » »	$x_2 = 1471,5$	»	$= \frac{9 \cdot 3}{2}$

*) Уравн. (30) въ полномъ видѣ таково:

$$x = \frac{981 \text{ [сантиметръ]}}{2} t^2 \text{ [секунда]}^2 = \frac{981 \cdot t^2}{2} \text{ [сантиметръ]}.$$

въ теченіе 3-ей секунды точка проходить $x_3 - x_2 = 2452,5$ сантим.

» 4-ой » » » $x_4 - x_3 = 3433,5$

Изъ (30) и изъ 1-ой таблицы настоящаго параграфа видно: 1) пути, проходимые падающею точкою отъ начала, при ея равномерномъ движеніи, пропорциональны квадрату времени протекшему отъ начала движенія. Изъ таблицы 2-й настоящаго параграфа видно: 2) пути, проходимые точкою въ теченіи ряда послѣдовательныхъ секундъ, пропорциональны послѣдовательнымъ нечетнымъ числамъ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13...

Изъ (28) находимъ скорости, которыми падающая точка обладаетъ въ различные моменты:

въ началѣ движенія $v_0 = 0$

въ концѣ 1-ой секунды $v_1 = 981$ сантим. въ секунду

» » 2-ой » $v_2 = 981 \cdot 2 = 1962$ сантим. въ секунду

» » 3-ей » $v_3 = 981 \cdot 3 = 2943$ » » »

» » 4-ей » $v_4 = 981 \cdot 4 = 3924$ » » »

§ 21. Работа. Работою T , которую производитъ сила, дѣйствующая на свободную точку, называється произведение

$$P \cdot h = T \quad (31)$$

гдѣ P на путь, пройденный точкою въ рассматриваемое время.

Если точка не свободна, а принуждена двигаться по опредѣленному пути (например, если она заключена въ прямолинейной трубкѣ) и если она направлена по пути, проходимому точкою, то работа тоже выражается произведеніемъ $P h$.

Если же направление пути составляетъ съ направлениемъ силы уголъ φ , то суждаемъ такъ разлагаемъ силу P на силу p , направленную по пути, и на силу q , перпендикулярную къ пути. Сила q только притягиваетъ точку къ тому, что препятствуетъ ей сойти съ пути, двигаетъ же только сила p равная проложенію $P \cos \varphi$ силы P на направление пути. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ:

$$T = p \cdot s,$$

гдѣ s пройденный точкою въ рассматриваемое время или

$$T = P \cdot \cos \varphi \cdot s \quad (32)$$

О получимъ формулу (31).

Еще опредѣленіе работы таково: работою называется произведение s на проложеніе $P \cos \varphi$ дѣйствующей силы P .

Примѣръ 1. Работа силы тяжести mg при прохождении падающей точкою пути $(x - x_0)$ равна:

$$mg (x - x_0).$$

Примѣръ 2. Работа силы тяжести mg при прохождении падающей точкою разстоянія x равна:

$$mg x.$$

§ 22. Единицы работы. За единицу работы обыкновенно принимаютъ килограммметръ. Килограммметромъ называется работа силы равной весу одного килограмма на пути равномъ метру, пройденномъ точкою по направлению той силы подъ исключительнымъ ея влияніемъ.

Въ абсолютной *C. G. S.* системѣ единиц за единицу работы принимается эргъ.

Эргомъ называется работа силы равной одному дина на пути равномъ сантиметру, пройденномъ точкою въ направлении той силы.

Мы видѣли въ § 13-омъ, что размѣръ единицы силы таковъ (MLT^{-1}). Слѣдовательно изъ (31) заключаемъ, что размѣръ единицы работы таковъ

$$[MLT^2]$$

1000000 эрговъ называется «мегаэргъ», такъ что:

$$\text{мегаэргъ} = 10^6 \text{ эргамъ}$$

10 мегаэрговъ называется «джоуль», такъ что:

$$\text{джоуль} = 10^7 \text{ эргамъ.}$$

§ 23. Живая сила. Произведение $\frac{mv^2}{2}$ массы на половину квадрата скорости называется живою силою.

$$\text{Живая сила} = \frac{mv^2}{2} \dots \dots \dots (34)$$

§ 24. Уравненіе живой силы. Во многихъ случаяхъ (въ какихъ именно—будетъ указано впоследствии) оказывается вѣрнымъ уравненіе, называемое *уравненіемъ живой силы* и заключающееся въ томъ, что работа равна приращенію живой силы

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \dots \dots \dots (35)$$

гдѣ v и v_0 скорости въ какіе либо два момента.

§ 25. Уравненіе живой силы въ движеніи точки, падающей въ пустотѣ. Пусть v_1 и v суть скорости въ моменты t_1 и t (то есть въ моменты, до которыхъ протекло время t_1 и t отъ начала времени). Приращеніе живой силы за рассматриваемый промежутокъ времени $t_1 - t$, будетъ:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Работа, совершенная силою тяжести за это время будетъ.

$$T = mg (x_1 - x_0).$$

Для сравненія этихъ величинъ выразимъ и ту и другую чрезъ t . На основаніи (28) имѣемъ:

$$v_1 = gt_1$$

$$v_0 = gt_0$$

Слѣдовательно:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mg^2}{2} (t_1^2 - t_0^2) \dots \dots \dots (36)$$

На основаніи (30) имѣемъ:

$$x_1 = \frac{gt_1^2}{2},$$

$$x_0 = \frac{gt_0^2}{2}.$$

Слѣдовательно.

$$T = mg(x_1 - x_0) = \frac{mg^2}{2} (t_1^2 - t_0^2) \dots \dots \dots (37)$$

Сравнивая (37) съ (36) видимъ, что:

$$T = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Уравненіе живой силы оправдывается въ движеніи падающей точки.

§ 26. Нѣкоторыя поясненія понятія «работа». Впослѣдствіи (§ 139) мы увидимъ, что уравненіе живыхъ силъ оправдывается для всѣхъ силъ природы. Во многихъ случаяхъ недоразумѣнія, возникающія по поводу понятія «работа», устраняются, если припомнимъ, что работа равна приращенію живой силы.

Такъ напримѣръ опредѣленіе килограмметра, какъ работы производимой при поднятіи одного килограмма на одинъ метръ, встречающееся во многихъ руководствахъ, не совсѣмъ точно. Дѣйствительно, работа силы, поднимающей одинъ килограммъ на высоту одного метра зависитъ еще отъ того, съ какимъ ускореніемъ она его поднимаетъ. При такомъ под-
скажемъ, на массу килограммъ дѣйствуютъ двѣ силы: поднимающая P и сила тяжести mg . Если эти силы равны, то поднимаемая масса будетъ (согласно 1-му закону Ньютона) двигаться равномерно подъ влияніемъ некоторой начальной скорости, такъ какъ равныя и противоположныя силы P и mg взаимно уничтожаются. Въ этомъ случаѣ работа поднимающей силы въ точности равна отрицательной работѣ силы тяжести и слѣдовательно, той положительной работѣ тяжести (всѣхъ 1 килограммъ), которую тяжесть производитъ при паденіи массы одного килограмма, проходящемъ на протяженіи 1-го метра высоты, и потому въ этомъ случаѣ равна килограмметру. Но если сила P больше тяжести одного килограмма, то поднимаемая масса будетъ подниматься съ ускореніемъ и тогда работа при поднятіи одного килограмма на 1 метръ равная $\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$ будетъ зависеть отъ того, до какой скорости v_1 доведено будетъ поднимать тело по проходѣ одного метра.

Въ случаѣ равномернаго движенія поднятя $t = r_0$, и работа совокупности двухъ равныхъ и противоположныхъ силъ P и mg равна нулю, ибо

$$\frac{m v_0^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = 0.$$

Въ случаѣ неравномернаго поднятя $\frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$ не равна нулю; работа силы P не равна работѣ силы mg и следовательно не равна килограмметру.

Иногда силу mg рассматриваютъ какъ сопротивление, *побѣждаемой* силой P . Но всякое сопротивление есть та же сила и несравненно удобнее вводить все сопротивления какъ силы, — тогда будемъ всегда приходить движеніе къ движенію свободной точки и не будемъ вводить никакихъ выражений, страдающихъ неопредѣленностью. Тогда работа совокупности всехъ действующихъ на точку силъ (съ томъ числѣ и сопротивлений) при равномерномъ-прямолинейномъ движеніи точки всегда равна нулю по 1-му закону Ньютона.

§ 27. Мощность. Не надо мѣшкать съ понятиемъ «работа» понятие «мощность» (слабый двигатель можетъ произвести въ теченіи большого времени такую же большую работу, какъ и сильный двигатель въ теченіи малова времени. Величина, опредѣляющая способность двигателя производить данную работу въ теченіи данного времени, называется мощностью. *Мощность равна работѣ произведенной двигателемъ въ единицу времени.*

Въ практической механикѣ за единицу мощности принимается лошадиная сила или *паровая лошадь*, обозначаемая такъ HP отъ англійскаго слова Horse Power = лошадиная сила.

$$HP = 75 \text{ килограмметровъ въ секунду} \quad (38)$$

Обыкновенная крестьянская лошадь, при 8 часовой работѣ въ сутки, даетъ несколько меньше, именно около 60 килограмметровъ въ секунду. Средней силы человекъ, при работѣ по 8 часовъ въ сутки, можетъ дать около $\frac{1}{7} HP$.

«Паровая машина въ 5 паровыхъ лошадей» (или въ 5 лошадиныхъ силъ) значитъ: паровая машина, способная произвести работу по 5 . 75, то есть по 375 килограмметровъ въ секунду, то есть можетъ поднять равномернымъ движеніемъ въ теченіи одной секунды или 375 килограммъ на высоту 1 метра, или 25 килограммъ на высоту 15 метръ въ, и такъ далѣе, — вообще можетъ въ теченіи секунды произвести работу равную поднятію такого вѣса p на такую высоту h , что

$$p \cdot h = 375 \text{ килограмметровъ.}$$

Такая машина можетъ въ теченіи n секундъ произвести n . 375 килограмметровъ работы.

Но по (6) скорость равна производной отъ пути по времени. Следовательно:

$$v = -gt + v_0 = \frac{dz}{dt}$$

или

$$dz = -gt dt + v_0 dt$$

Интегрируя находимъ

$$\int dz = -g \int t dt + v_0 \int dt$$

то есть:

$$z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + c_2 \dots \dots \dots (44)$$

гдѣ c_2 постоянная интегрир. Опредѣляемъ ее по начальнымъ даннымъ: при $t = 0$ по условию $z = 0$. Следовательно при $t = 0$ уравнение (44) даетъ:

$$c_2 = 0.$$

Поэтому, въ теченіи движенія, (44) имѣетъ видъ:

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \dots \dots \dots (45)$$

Вотъ какой видъ имѣетъ уравненіе послѣдуемаго движенія.

Опредѣлимъ наибольшую высоту, до которой поднимается точка. Иначе говоря, найдемъ максимумъ для z . Для этого приравняемъ нулю производную по t отъ правой части уравненія (45). Получимъ

$$v_0 - gt = 0,$$

откуда:

$$t = \frac{v_0}{g} \text{ — время поднятія до наибольшей высоты.}$$

Вставимъ эту величину $\frac{v_0}{g}$ вмѣсто t въ (45), получимъ:

$$z_{\text{maxim}} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Назовемъ наибольшую высоту поднятія буквою h . Тогда:

$$z_{\text{maxim.}} = h = \frac{v_0^2}{2g} \dots \dots \dots (46)$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{2gh} \dots \dots \dots (47)$$

Формула (46) опредѣляетъ высоту наибольшаго поднятія бр. шенной точки по данной начальной скорости.

Формула (47) опредѣляетъ ту начальную скорость, съ которою надо бросить вертикально вверхъ точку въ безвоздушн.мъ пространствѣ, чтобы она поднялась на высоту h .

Обѣ эти формулы имѣютъ весьма важное значеніе въ механикѣ. Уравненіе (47), въ примѣненіи его къ движенію жидкости, называется формулою Торичелли.

При больших начальных скоростях величины, вычисляемые по формулам (46) и (47), значительно разнятся от тех, какие получаются для движения точки в воздухе, который оказывает сопротивление движению но при небольших начальных скоростях эти величины мало отличаются от получаемых для движения в воздухе.

§ 29 Потенциальная функция. Для всех сил природы существуют такие функции U (координат движущейся точки), производные которых по этим координатам равны продолжениям силы на оси координат, такъ что,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Z \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Такая функция U называется *потенциальной* или *силовой*. Например, в движении точки брассовой вверх (§ 28) и потенциальная функция равна

$$mgz = U, \quad (49)$$

продолжения силы тяжести на оси равны:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = -mg \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

§ 30. Законъ сохранения живой силы. Во всехъ техъ случаяхъ, когда U — постоянна, когда ее движение ничемъ не стѣснено или когда она можетъ двигаться по поверхности или линии не изменяющимъ своей величины, существуетъ законъ, *живая сила равна сумме потенциальной и кинетической энергии* и *постояннаго количества*:

$$\frac{mv^2}{2} = U + C \quad (51)$$

Этотъ законъ подтверждается на всехъ существующихъ наблюденияхъ.

Если U есть функция трехъ координатъ x, y, z точки, то (51) означаетъ, что при возвращении въ прежнее положеніе живая сила принимаетъ ту же величину, которую имѣла при предыдущемъ прохожденіи въ это положеніе. Поэтому законъ, выражаемый формулою (51), называется **закономъ сохранения живой силы**.

Въ этомъ мы подробно остановимся на этомъ законѣ, а пока про-

вѣрнѣе его существованіе на разобранномъ въ § 28 движеніи точки брошенной вверхъ.

Въ этомъ движеніи какъ мы указали при формулѣ (49):

$$U = -mgz \dots \dots \dots (52)$$

Выразимъ U чрезъ время, подставляя въ (52) вмѣсто z его выраженіе чрезъ t , данное формулою (45). Получимъ:

$$U = -mg \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) = -mg v_0 t + \frac{mg^2 t^2}{2} \dots \dots \dots (53)$$

Выразимъ теперь живую силу $\frac{mv^2}{2}$ чрезъ t пользуясь формулою (43). Получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (v_0 - gt)^2 = \frac{mv_0^2}{2} - mv_0 gt + \frac{mg^2 t^2}{2} \dots \dots \dots (54)$$

Сравнивая (54) съ (53) получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + \frac{mv_0^2}{2} \dots \dots \dots (55)$$

Но при данной начальной скорости v_0 послѣдній членъ уравненія (55) постояненъ; слѣдовательно (55) имѣетъ видъ (51) Законъ сохраненія живой силы оправдывается въ разсматриваемомъ движеніи.

Вставляя въ (55) вмѣсто t его величину $-mgz$, получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgz \dots \dots \dots (56)$$

Эта формула (56) ясно показываетъ что всякій разъ какъ координата z приобретаетъ ту же величину, какую имѣла прежде, такъ и живая сила $\frac{mv^2}{2}$ приобретаетъ прежнюю величину. Когда, напримѣръ, при восходящемъ движеніи брошенная точка была на высотѣ $Z = H$, то по (56) живая сила была

$$\frac{mv^2}{2} = mgH.$$

Когда, опускаясь внизъ, точка придетъ опять на высоту H , то живая сила, согласно (56), опять сдѣлается равной $\frac{mv^2}{2} = mgH$.

§ 31. Законъ сохраненія энергіи. Живую силу $\frac{mv^2}{2}$ называютъ также *кинетическою энергіею* движущейся точки

Величина же

$$C_1 - U \dots \dots \dots (57)$$

гдѣ C_1 есть вѣкоторое постоянное, называется *потенциальною энергіею* движущейся точки.

Сумма энергіи потенциальной и кинетической называется *полною энергіею* движущейся точки.

Опредѣлимъ такое постоянное C_2 , чтобы

$$C_2 - C_1 = C$$

Тогда изъ (51) получимъ

$$\frac{m^2}{2} = U + C_2 - C$$

или

$$\frac{m^2}{2} + (C_1 - U) = C_2 \quad (58)$$

Это уравненіе согласно съ опредѣленіемъ величины (57) показываетъ, что *сумма кинетической и потенциальной энергии движущейся точки есть величина постоянная. Другими словами полная энергия движущейся точки есть величина постоянная.*

Въ атомъ состоитъ самое простое выраженіе знаменитаго закона сохранения энергии, о которомъ подробнѣе будетъ сказано впоследствии.

Но тому какъ мы его вывели видно, что законъ сохранения энергии идентиченъ съ закономъ сохранения живой силы.

Уравненіе (58) показываетъ, что съ увеличеніемъ кинетической или потенциальной увеличивается (и обратно), но измѣненіе обѣихъ энергій происходитъ такъ, что сумма ихъ остается постоянной.

Въ движеніи точки брошенной вверхъ, напримѣръ, съ поднятіемъ и уменьшается g , следовательно уменьшается кинетическая энергия но зато потенциальная энергия ($C_1 - U$), равная $(C_1 + mgz)$, увеличивается. Въ нисходящемъ движеніи дѣло происходитъ обратное. Но въ любой моментъ полная энергия, равная суммѣ энергій кинетической и потенциальной, имѣетъ одну и ту же величину.

Въ слѣдствіи мы увидимъ, что и уравненіе живыхъ силъ представляетъ тотъ же законъ сохранения энергии, выраженный только въ другой формѣ.

§ 32. Гармоническое прямолинейное движеніе. Чрезвычайно важное имѣетъ прямолинейное движеніе, производимое точкою подѣйствіемъ притяженія къ неподвижной точкѣ пропорціональнаго разстоянію движущейся точки отъ неподвижной притягивающей точки (центра притяженія). Это движеніе называется *прямолинейнымъ гармоническимъ*. Достаточно сказать, что въ такомъ движеніи находятся частица свѣтового луча, конецъ камертона, точка колеблющейся струны, чтобы дать полную картину важности имѣетъ это движеніе въ физикѣ. Исполни-

емъ же есть притяженіе оказываемое центромъ притяженія на разстояніи x единицъ. На разстояніи x притяженіе будетъ hx . Притяженіе h — константа притяженія за начал координатъ, возьмемъ ось x по направлению притяженія въ какой либо моментъ центрі притяженія съ движущейся точкой. Когда x положительно, то притяженіе направлено противъ

положно направленію возрастанія x осей. Следовательно проложевія дѣйствующей силы на оси будутъ:

$$X = -hx$$

$$Y = 0$$

$$Z = 0.$$

Если точка не получитъ никакой начальной скорости, а прямо изъ состояніи покоя подвергается притяженію къ началу координатъ, то движеніе ея будетъ прямолинейнымъ и можно ограничиться разсмотрѣніемъ только 1-го изъ только-что написанныхъ уравненій. Согласно (11) дифференціальное уравненіе движенія будетъ таково:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -hx = X \dots \dots \dots (59)$$

Положимъ, для краткости: $\frac{h}{m} = n^2. \dots \dots \dots (60)$

Тогда (59) приметъ видъ $\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x. \dots \dots \dots (61)$

Общій интегралъ этого уравненія будетъ:

$$x = A \cos(nt) + B \sin(nt) \dots \dots \dots (62)$$

Интегрирование производится по теоріи линейныхъ уравненій съ постоянными коэффициентами. Но, и не будучи знакомымъ съ этою теоріею, можно убѣдиться въ справедливости формулы (62) дифференцируя ее два раза и приходя такимъ образомъ обратно къ (61).

Изъ (62), согласно съ (6), имѣемъ:

$$v = \frac{dx}{dt} = -nA \sin(nt) + nB \cos(nt) \dots \dots \dots (63)$$

Положимъ, что въ началѣ движенія, при $t = 0$, притягиваемая точка находилась на разстояніи x_0 отъ начала координатъ и скорость ея была равна нулю. Следовательно:

$$x_0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

$$B = 0 \text{ согласно съ (63)}$$

и уравненія (62) и (63) имѣютъ видъ:

$$x = x_0 \cos(nt) \dots \dots \dots (64)$$

$$v = -nx_0 \sin(nt) \dots \dots \dots (65)$$

Формула (65) можетъ быть получена также изъ (64) простымъ дифференцированиемъ. Уравненіе движенія выражается формулою (64).

Разсмотримъ, для уясненія гармоническаго движенія, довольно простую задачу, приводящую къ тому же движенію.

*) Штурмъ. Анализъ, § 584.

дугу NX . Тогда вместо (67) будем иметь:

$$\frac{\beta_1}{2\pi} = \frac{t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Изъ чертежа видно, что $\beta = \beta_1 + \beta_0$.

Вставляя эту величину въ (66) получимъ:

$$x = a \sin(\beta_1 + \beta_0) \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Вставляя сюда, вместо β , его величину, предъленную изъ (70), получимъ:

$$x = a \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta_0\right) \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

Наконецъ если будемъ отсчитывать время отъ того момента, когда точка M находится въ B , то есть, когда $\beta = \frac{\pi}{2}$, то изъ (72) получимъ:

$$x = a \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Сравнивая эту формулу съ (64), видимъ, что (64) принимаетъ видъ (73) если положить

$$x_0 = a$$

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Слѣдовательно точка, совершающая гармоническое движеніе подъ дѣйствиемъ притяженія къ притягивающему центру, пропорціональнаго разстоянію отъ этого центра, движется такъ, какъ точка M — проекція на диаметръ точки A равномерно движущейся по окружности.

Обыкновенно время отсчитываютъ въ гармоническомъ движеніи отъ прохожденія точки чрезъ притягивающій центръ и потому движеніе выражаютъ уравненіемъ (69).

Крайнее разстояніе a , на которое удаляется точка M отъ центра, называется *амплитудой* гармоническаго движенія.

Время T полнаго колебанія называется (какъ мы уже сказали) *периодомъ*.

Уголъ β называется *фазою*.

Уголъ β_0 называется *начальной фазой*.

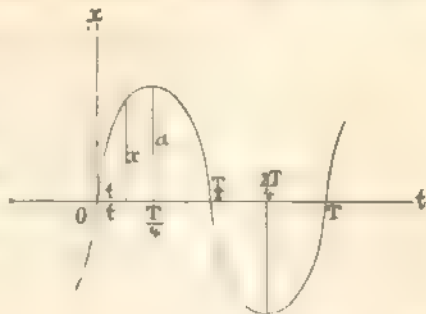
§ 34 Графическое изображеніе прямолинейно-гармоническаго движенія.

Пользуясь уравненіемъ (69).

$$x = a \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

гармоническаго движенія возьмемъ систему прямоугольныхъ координатъ и примемъ время t за абсциссы, а разстоянія x за ординаты кривой,

выражаемой уравнением (69). Получимъ синусоиду (фиг. 2), которая наглядно изображаетъ законы гармоническаго движенія. Необходимо при этомъ имѣть въ виду, что эта синусоида не представляетъ собою траекторіи гармоническаго движенія, которая прѣямая. Синусоида эта показываетъ только, какъ, съ теченіемъ времени измѣняется разстояніе точки, отъ притягивающаго центра.



Черт. 2.

35 Кинетическая энергія гармоническаго движенія. Дифференцируя уравненіе (69) получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a \cdot 2\pi}{T} \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

т. е. скорость будетъ:

$$v = \frac{a \cdot 2\pi}{T} \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad (75)$$

Кинетическая энергія или живая сила будетъ

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 2\pi^2}{T^2} \cdot \cos^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) = \frac{m a^2 \cdot 2\pi^2}{2 T^2} - \frac{m a^2 \cdot 2\pi^2}{2 T^2} \sin^2\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right) \\ &= \frac{m a^2 \cdot 2\pi^2}{2 T^2} - \frac{m}{2 T^2} \cdot 2\pi^2 x^2 \end{aligned} \quad (76)$$

36. Потенціальная энергія гармоническаго движенія. Согласно (59)

$$X = -hx \quad (77)$$

потенціальная функция будетъ (согласно § 29) такова, что производная ея равна X . Согласно (77) производная потенциальной функции будетъ равна $-hx$. Следовательно потенциальная функция такъ ва:

$$U = - \int hx dx = -\frac{hx^2}{2} + C \quad (78)$$

послѣ интегрированія. Но при $x = 0$, согласно съ (77) продолженіе потенциальной функции равно нулю. Следовательно, при $x = 0$ потенциальная функция $U = 0$. Следовательно изъ (78), постоянное $C = 0$.

Изъ (77) $h = m\omega^2$. Вставляя сюда вмѣсто h величину изъ (77) получимъ $h = \frac{m \cdot 4\pi^2}{T^2}$. Вставляя эту величину въ (78), въ которомъ

$$U = -\frac{m \cdot 4\pi^2}{2 T^2} x^2.$$

(Слѣдовательно потенциальная энергія, на основаніи (57), будетъ)

$$\text{потенц. эмерг.} = C_1 + \frac{2m\pi^2 x^2}{T^2}$$

§ 37. Полная энергія гармоническаго движенія. Въ § 31-мъ мы видѣли, что полную энергію называется сумма энергій кинетической и потенциальной. Слѣдовательно, на основаніи выводовъ §§ 35 и 36, получимъ для полной энергіи гармоническаго движенія величину:

$$\text{полная энергія} = \frac{ma^2 \cdot 2\pi^2}{T^2} - \frac{2m\pi^2}{T^2} x^2 + \frac{2m\pi^2}{T^2} x^2 + C_1$$

или, по приведеніи:

$$\text{полная энергія} = \frac{ma^2 \cdot 2\pi^2}{T^2} + C_1 \quad (79)$$

Впослѣдствіи мы увидимъ, что полную энергію измѣряется способность данныхъ силъ въ данной системѣ производить работу, чѣмъ большая работа можетъ быть произведена силами дѣйствующими въ данной системѣ точекъ, тѣмъ больше полная энергія системы.

Изслѣдуя полную энергію гармоническаго движенія, происходящаго въ системѣ состоящей изъ движущейся точки и изъ центра притяженія, замѣтимъ, что при амплитудѣ равной нулю, то есть при $a = 0$ никакой работы не можетъ быть произведено силами системы, потому что въ этомъ случаѣ движущаяся точка находится въ центрѣ притяженія и уже нигде не притягивается, предполагается также, что она не подвержена никакимъ вѣншнимъ влияніямъ, то есть на нее не дѣйствуютъ никакія силы кромѣ притяженія къ центру и она не получаетъ никакихъ начальныхъ скоростей. Поэтому, при $a = 0$, полная энергія $= 0$. Слѣдовательно $C_1 = 0$, и окончательно получается для полной энергіи гармоническаго движенія такое выраженіе:

$$\text{полная энергія} = \frac{2ma^2\pi^2}{T^2} \dots \dots \dots (80)$$

- величина, какъ и слѣдовало ожидать, постоянная для данного движенія, то есть при данномъ a . Это надо понимать такъ: если мы отведемъ точку отъ центра притяженія на разстояніе a и затѣмъ предоставимъ ей двигаться подѣ влияніемъ притяженія этого центра, то полная энергія ея будетъ величина постоянная: въ каждый моментъ она будетъ имѣть одну и ту же величину. Чѣмъ дальше точка находится въ такомъ движеніи отъ центра (чѣмъ больше абсолютная величина x) тѣмъ больше ея потенциальная энергія $\frac{2m\pi^2 x^2}{T^2}$ и тѣмъ меньше ея кинетическая энергія $\frac{2m\pi^2 a^2}{T^2} - \frac{2m\pi^2 x^2}{T^2}$.

Но сумма этихъ энергій постоянно равна $\frac{2m\pi^2 a^2}{T^2}$.

§ 38. Движеніе конца гибкаго прутка. Если зажать конецъ тонкаго и гибкаго (напримѣръ стальнаго) прутка въ тискахъ, а затѣмъ отклонить свободный конецъ A прутка отъ положенія равновѣсія, то извѣстно, что упру-

гія силы прутка, стремящаяся привести его опять въ положеніе равновѣсія, пропорціональна разстоянію конца A отъ его положенія равновѣсія. Поэтому если затѣмъ оставить двигаться прутікъ подѣ влияніемъ силы упругости, то конецъ A будетъ двигаться такъ, какъ будто бы онъ притягивался къ своему положенію равновѣсія съ силою пропорціональною его разстоянію отъ этого положенія. Слѣдовательно если первоначальное отклоненіе достаточно мало для того, чтобы дугу описываемую точкою A можно было принять за прямую, то конецъ A будетъ совершать гармоническое движеніе. Явленіе это будетъ искажаться сопротивленіемъ воздуха въ томъ смыслѣ, что амплитуда будетъ уменьшаться, колебанія будутъ «затухать» и прутікъ довольно быстро придетъ въ состояніе покоя. Но всегакі его движеніе въ теченіи одного полнаго колебанія можно разсматривать какъ гармоническое.

ГЛАВА II.

Криволинейное движеніе точки.

§ 39. Уравненіе движенія точки. Траекторія. Если даны уравненія:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= F(t) \\ z &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81)$$

въ которыхъ x, y, z суть координаты движущейся точки, а стоящая въ правыхъ частяхъ функція даны явно, то движеніе точки вполне определено этими уравненіями, потому что по нимъ мы знаемъ, гдѣ въ какое время находится точка, такъ какъ она даетъ ея координаты для каждаго задаваемого значенія t .

Если мы исключимъ время t изъ этихъ уравненій, то получимъ два уравненія, въ которыхъ переменными останутся только координаты x, y, z . Эти два уравненія представляютъ собою кривую, служащую геометрическимъ мѣстомъ всѣхъ тѣхъ точекъ пространства, чрезъ которыя проходитъ движущаяся точка. Такая кривая (такой путь, проходимая точкою въ ея движеніи, называется *траекторіею* движущейся точки.

Примѣръ. Определить траекторію точки по уравненіямъ движенія:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos(\omega \cdot t) \\ y &= R \sin(\omega t) \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (82)$$

Вводя въ квадратъ и складывая первыя два изъ этихъ уравненій и принимая во вниманіе 3-е уравненіе получимъ такія уравненія траекторіи:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2 \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

Изъ нихъ мы видимъ, что траекторія представляетъ собою окружность описанную радиусомъ R около начала координатъ въ плоскости (x, y) . Данные уравнения движения (82) показываютъ, что, при $t = 0$, должно быть $x = R$; $y = 0$, $z = 0$. Значитъ время считается отъ момента прохождения точки чрезъ пересѣченіе круговой траекторіи съ положительною осью x осей. Изъ уравнений (82) видно еще, что уголъ, составляемый съ осью z осей радиусомъ, проведеннымъ въ движущуюся точку въ концѣ времени t , равенъ ωt . Следовательно дуга, проходимая точкою въ теченіи времени t , равна $R\omega t$ — она пропорциональна времени; следовательно въ равные промежутки времени точка проходитъ равныя дуги. Такое движеніе называется *равномернымъ движениемъ по окружности*.

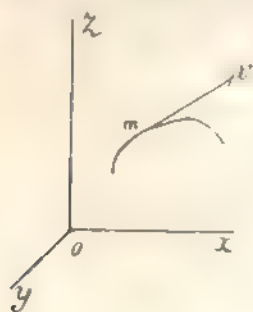
§ 40. Скорость въ криволинейномъ движеніи точки. Пользуясь анализомъ безконечно малыхъ, мы принимаемъ безконечно малый элементъ ds траекторіи за прямолинейный и движеніе по этому элементу за равномерное. Прилагая къ такому движенію формулу (6), получимъ для скорости криволинейнаго движенія формулу:

$$v = \frac{ds}{dt} \dots \dots \dots (84)$$

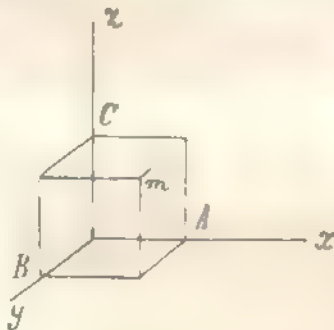
Итакъ, во всякомъ движеніи точки скорость равна первой производной отъ пути по времени.

§ 41. Изображеніе скорости векторомъ. Скорость, которою обладаетъ движущаяся точка въ концѣ времени t изображаютъ, проводя касательную къ траекторіи въ той ея точкѣ, гдѣ въ этотъ моментъ находится движущаяся точка, и откладывая на этой касательной въ сторону движенія

векторъ, длина котораго содержитъ столько единицъ длины, сколько скорость точки, соответствующая этому моменту, содержитъ единицъ скорости (фигура 3).



Фиг. 3



Фиг. 4.

разсматривать какъ три отдѣльных уравненія движенія проложеній A , B и C движущейся точки на оси координатъ (фиг. 4). Именно $x = f(t)$ уравненіе движенія точки A ; $y = \varphi(t)$ уравненіе движенія точки B ; $z = \psi(t)$ уравненіе движенія точки C . Каждая изъ точекъ A , B , C совершаетъ прямолинейное движеніе по той оси координатъ, на которой она

находится. Примемъ такіа обозначенія:

v_x = скорость точки A

v_y = скорость точки B

v_z = скорость точки C

(здесь v_x , напримѣръ, есть буква v со значкомъ x , а не произведение). Для прямолинейныхъ движеній эти скорости, по формулѣ (6), суть:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (85)$$

Эти уравненія выражаютъ, что при всякомъ движеніи точки скорости ея проложеній A , B , C равны первымъ производнымъ отъ соответственныхъ координатъ движущейся точки по времени.

§ 43. Теорема о скоростяхъ проложеній. Скорость v самой движущейся точки направлена по элементу ds траектории. Следовательно проложенія этой скорости на оси координатъ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} v \cdot \cos(v, x) &= v \cdot \cos(ds, x) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} = v_x \\ v \cdot \cos(v, y) &= v \cdot \cos(ds, y) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = v_y \\ v \cdot \cos(v, z) &= v \cdot \cos(ds, z) = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} = v_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (86)$$

Итакъ:

$$\left. \begin{aligned} v \cdot \cos(v, x) &= v_x = \frac{dx}{dt} \\ v \cdot \cos(v, y) &= v_y = \frac{dy}{dt} \\ v \cdot \cos(v, z) &= v_z = \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (87)$$

Эти уравненія (87) выражаютъ слѣдующее *Теорема: проложенія скорости движущейся точки равны скоростямъ проложеній этой точки*, то есть: проложенія скорости v точки m (фиг. 4) равны скоростямъ точекъ A , B , C .

И тѣ и другія равны первымъ производнымъ отъ соответственныхъ координатъ по времени, какъ это видно изъ (86).

§ 44. Опредѣленіе скорости движущейся точки по даннымъ уравненіямъ движенія. Возводя, почленно, уравненія (87) въ квадратъ и складывая,

получимъ:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2. \quad (88)$$

Отсюда:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \quad (89)$$

Радикальъ этотъ всегда берется со знакомъ $+$. () направление же скорости скажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ.

Формула (89) даетъ возможность, зная уравненія движенія найти скорость v движущейся точки, потому что, дифференцируя уравненія по t найдемъ производныя $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ вставляя же ихъ въ (89), найдемъ v .

Пояснимъ это на томъ же равномерномъ движеніи по окружности, которое намъ служило примѣромъ въ § 39.

Примѣръ. Найти скорость по уравненіямъ движенія (82).

Дифференцируя эти уравненія по t , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -R\omega \cdot \sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} &= +R\omega \cdot \cos(\omega t) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (90)$$

Вставляя въ (89) получимъ:

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]} = R\omega \quad (91)$$

§ 44 Направленіе скорости въ криволинейномъ движеніи точки. Изъ (87) и (89) слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(v, x) &= \frac{\frac{dx}{dt}}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos(v, y) &= \frac{\frac{dy}{dt}}{v} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos(v, z) &= \frac{\frac{dz}{dt}}{v} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (92)$$

Эти формулы определяют косинусы угловъ наклоне́нія скорости къ осямъ координатъ, которыми определяется направлеше скорости.

Пояснимъ прил. жение этихъ формулъ на томъ же примѣрѣ равномернаго движенія точки по окружности.

Примѣръ. Определить направлеше скорости по уравненіямъ движенія (82)?

Дифференцируя уравненія (82) по t получимъ выраженія (90); вставляя ихъ въ (92), получимъ:

$$\cos(v, x) = \frac{-R\omega \cdot \sin(\omega t)}{R\omega} = -\sin(\omega t)$$

$$\cos(v, y) = \frac{+R\omega \cdot \cos(\omega t)}{R\omega} = +\cos(\omega t)$$

$$\cos(v, z) = 0$$

или

$$\left. \begin{aligned} \cos(v, x) &= -\sin(\omega t) \\ \sin(v, x) &= \cos(\omega t) \\ \cos(v, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (93)$$

Припоминая, что

$$\cos(90^\circ + \varphi) = -\sin \varphi$$

$$\sin(90^\circ + \varphi) = +\cos \varphi$$

видимъ, что уравненіями (93) показывается перпендикулярность скорости v къ радиусу. Это впрочемъ ясно и само по себѣ, потому что скорость въ этомъ движеніи направлена по касательной къ окружности, а касательная къ окружности перпендикулярна къ радиусу.

§ 45. Ускореніе въ криволинейномъ движеніи точки. Положимъ, что кривая MM (фиг. 5) представляетъ собою траекторію точки M ; MV скорость въ концѣ времени t , $M'V'$ скорость въ концѣ времени $t + \Delta t$, когда точка приходитъ въ M' .

Проведемъ MG_1 равную и параллельную вектору MV . Соединимъ G_1 съ V' .

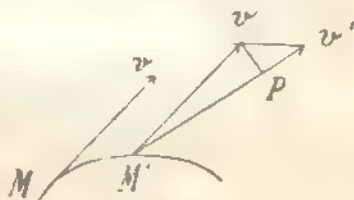
Векторъ G_1V' называется *полнымъ геометрическимъ приращеніемъ скорости*.

Отложимъ на MGV отъ точки M длину MP равную скорости MV . Векторъ PV'

называется *приращеніемъ скорости по величинѣ*. Векторъ $V'P$ называется *приращеніемъ скорости по направленію*. Чѣмъ меньше Δt , тѣмъ болѣе уголъ G_1PV' стремится приближаться къ прямому. Изъ прямоугольнаго треугольника $V'PV$ имѣемъ:

$$V_1V' = \sqrt{(PV')^2 + (V_1P)^2}$$

то есть *полное геометрическое приращеніе скорости равно геометриче-*



Фиг. 5

ской суммы приращенія скорости по величинѣ и приращенія скорости по направленію.

Предѣлъ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{V_1 V'}{\Delta t} \right)$$

отношенія полного геометрическаго приращенія скорости къ Δt называется *ускореніемъ* въ криволинейномъ движеніи. Итакъ:

$$\text{ускореніе} = \lim_{\Delta t} \left(\frac{V_1 V'}{\Delta t} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Это есть то самое, что Ньютонъ во второмъ основномъ законѣ механики называетъ *измѣненіемъ* движенія.

По мѣрѣ приближенія Δt къ нулю (если разсматриваемъ все меньшій и меньшій путь MM') разсматриваемъ точку M' все ближе и ближе къ точкѣ M . Вместе съ этимъ полное геометрическое приращеніе $V_1 V'$ скорости стремится къ опредѣленному направленію, которое и принимается за *направленіе ускоренія*. Ускореніе изображается векторомъ, выходящимъ изъ точки M , имѣющимъ сказанное предѣльное направленіе и длину равную

$$\lim_{\Delta t} \left(\frac{V_1 V'}{\Delta t} \right).$$

§ 46. Теорема о проложеніяхъ ускоренія. Обозначимъ чрезъ x, y, z координаты движущейся точки M . Припоминая, что скорость MV направлена по элементу ds траекторіи и что косинусы угловъ, составляемыхъ элементомъ кривой съ осями координатъ, соответственно равны:

$$\frac{dx}{ds}; \frac{dy}{ds}; \frac{dz}{ds}$$

заключаемъ, что координаты конца V скорости будутъ:

$$x + MV \cdot \frac{dx}{ds}; \quad y + MV \cdot \frac{dy}{ds}; \quad z + MV \cdot \frac{dz}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Но MV изображаетъ у насъ скорость, которая по (84) равна $\frac{ds}{dt}$. Подставляя въ величины (95), вмѣсто MV , эту скорость, найдемъ, что координаты точки V соответственно равны.

$$x + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds}; \quad y + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds}; \quad z + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds}$$

или

$$x + \frac{dx}{dt}; \quad y + \frac{dy}{dt}; \quad z + \frac{dz}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Координаты точки V , вѣдѣствие равенствъ и параллельности векторовъ MV и $M'V_1$, будутъ равны координатамъ точки V , приращеннымъ на dx, dy, dz , то есть будутъ равны:

$$x + \frac{dx}{dt}; \quad y + \frac{dy}{dt}; \quad z + \frac{dz}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Координаты точки V равны координатам точки V' , приращенным на дифференциалы этих координат, потому что V' есть та самая точка, въ которую приходитъ V , когда t обращается въ $t + dt$. Итакъ, координаты точки V' суть:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{dx}{dt} + dx + d \frac{dx}{dt} \\ y + \frac{dy}{dt} + dy + d \frac{dy}{dt} \\ z + \frac{dz}{dt} + dz + d \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (98)$$

Но проложенія вектора V_1V' на оси координатъ должны быть равны разностямъ соответственныхъ координатъ его концовъ. Мы получимъ эти проложенія, вычитая (97) изъ (98). Слѣдовательно проложенія вектора V_1V' на оси координатъ будутъ:

$$\begin{aligned} & d \frac{dx}{dt}; \quad d \frac{dy}{dt}; \quad d \frac{dz}{dt} \\ \text{или} \quad & \frac{d^2x}{dt^2} dt; \quad \frac{d^2y}{dt^2} dt; \quad \frac{d^2z}{dt^2} dt \dots \dots \dots (99) \end{aligned}$$

Таковы проложенія полнаго геометрическаго приращенія скорости на оси координатъ. Для ихъ на dt , получимъ согласно опредѣленію (94) проложенія ускоренія на оси координатъ. Итакъ, проложенія ускоренія на оси координатъ соответственно равны:

$$\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d^2z}{dt^2} \dots \dots \dots (100)$$

Но эти величины представляютъ собою, на основаніи (9) ускоренія проложеній A , B , C (фиг. 4) движущейся точки на оси координатъ. Такимъ образомъ мы получили слѣдующее: *Теорема: проложенія ускореній равны ускореніямъ проложеній движущейся точки.*

§ 47. Центроостремительное и тангенціальное ускоренія. Извѣстно, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{v}{dt}$$

Помножая и дѣля на ds стоящую подъ знакомъ d часть числителя дроби, стоящей въ правой части этого равенства и самую дробь, получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

Это можно, обозначая скорость чрезъ v , написать еще слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(\left(\frac{dx}{ds}\right) \cdot v\right)}{ds} \cdot t.$$

Производя въ дѣйствительности указанное здѣсь дифференцирование произведенія $\frac{dx}{ds} \cdot v$ по s , получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} \cdot v + \frac{d^2x}{ds^2} \cdot v^2$$

или, переставляя множители и измѣняя видъ одного изъ нихъ множеніемъ и дѣленіемъ на dt и замѣною t чрезъ $\frac{ds}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + \frac{d^2x}{ds^2} \cdot v^2$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{d^2x}{ds^2} \cdot v^2 \dots \dots \dots (101)$$

Припомнимъ, что косинусы угловъ α , β , γ составляемыхъ элементомъ ds съ осями координатъ выражаются формулами:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \dots \dots \dots (102)$$

и что косинусы λ , μ , ν угловъ, составляемыхъ радиусомъ кривизны ρ съ осями координатъ выражаются формулами.

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= \rho \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \\ \cos \mu &= \rho \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \\ \cos \nu &= \rho \cdot \frac{d^2z}{ds^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (103)$$

Вставимъ въ (101) вмѣсто $\frac{dv}{ds}$ и $\frac{d^2x}{ds^2}$ величины опредѣляемыя изъ (102) и (103),

получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cdot \cos \alpha + v^2 \cdot \frac{\cos \lambda}{\rho}.$$

Подобныя же формулы можно получить для $\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$. Сопоставляя эти формулы вмѣстѣ, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cdot \cos \alpha + v^2 \cdot \frac{\cos \lambda}{\rho} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cdot \cos \beta + v^2 \cdot \frac{\cos \mu}{\rho} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cdot \cos \gamma + v^2 \cdot \frac{\cos \nu}{\rho} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (104)$$

Эти формулы показываютъ, что полное ускореніе есть геометрическая сумма двухъ векторовъ $\frac{d^2r}{dt^2}$ направленнаго по касательной и $\frac{v^2}{\rho}$ направленнаго по нормали. Эти векторы носятъ такіа названія:

$$\frac{dr}{dt} = \text{тангенціальное ускореніе} \dots \dots \dots (105)$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \text{нормальное или центростремительное ускореніе} \dots \dots (106)$$

Называя буквою j полное ускореніе и припоминая, что, какъ мы это сейчасъ видѣли, оно представляетъ собою геометрическую сумму ускореній тангенціальнаго и нормальнаго, выраженныхъ формулами (105) и (106) заключаемъ, что:

$$j = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \dots \dots \dots (107)$$

§ 48. Опредѣленіе ускоренія по даннымъ уравненіямъ движенія. По даннымъ уравненіямъ движенія:

$$\left. \begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= F(t) \\ z &= \varphi(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81)$$

легко опредѣлить двукратнымъ дифференцированіемъ вторыя производныя отъ координатъ по времени:

$$\frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

которыя суть ускоренія проложеній на оси координатъ движущейся точки. Но эти же вторыя производныя, на основаніи теоремы § 46-го суть проложенія ускоренія j движущейся точки на оси координатъ, такъ что:

$$\left. \begin{aligned} j \cdot \cos(j, x) &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ j \cdot \cos(j, y) &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ j \cdot \cos(j, z) &= \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (108)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \dots \dots \dots (109)$$

Опредѣливъ изъ уравненій движенія вторыя производныя отъ координатъ по времени и вставивъ ихъ въ (109), — получимъ величину ускоренія.

§ 49. Направление ускоренія. Изъ (108) слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos (j, x) &= \frac{\frac{d \cdot x}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d \cdot x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot z}{dt}\right)^2}} \\ \cos (j, y) &= \frac{\frac{d \cdot y}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d \cdot x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot z}{dt}\right)^2}} \\ \cos (j, z) &= \frac{\frac{d \cdot z}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{d \cdot x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot z}{dt}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (110).$$

Этими формулами и опредѣляются косинусы угловъ наклоенія ускоренія къ осямъ координатъ.

§ 50. Ускореніе и его направленіе въ равномерномъ движеніи точки по окружности. Мы уже неоднократно рассматривали это движеніе въ качествѣ примѣра. Посмотримъ, каково ускореніе въ этомъ движеніи и какъ оно направлено. Первые производныя отъ координатъ по времени нами уже выведены въ § 43 подъ номеромъ (96); дифференцируя ихъ еще разъ, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -R\omega^2 \cdot \cos (\omega t) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -R\omega^2 \cdot \sin (\omega t) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (111)$$

Вставляя въ (109) получимъ:

$$j = \sqrt{R^2 \omega^4 [\cos^2 (\omega t) + \sin^2 (\omega t)]} = R\omega^2$$

Итакъ ускореніе въ равномерномъ движеніи точки по окружности опредѣляется формулою:

$$j = R\omega^2 \dots \dots \dots (112)$$

Оно не измѣняетъ величины скорости, но измѣняетъ ея направленіе—загибаетъ въ окружность траекторію, которая безъ этого ускоренія была бы, по первому основному закону Ньютона, прямолинейна. Уже самое это обстоятельство указываетъ на то, что ускореніе это направлено не по касательной къ окружности. Посмотримъ, какъ же оно направлено. Встав-

для найденныя вторыя производныя изъ (111) въ (110), получимъ:

$$\cos(j, x) = -\frac{R\omega^2 \cdot \cos(\omega t)}{R\omega^2} = -\cos(\omega t)$$

$$\cos(j, y) = \frac{-R\omega^2 \cdot \sin(\omega t)}{R\omega^2} = -\sin(\omega t),$$

$$\cos(j, z) = 0$$

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} \cos(j, x) &= -\cos(\omega t) \\ \sin(j, x) &= -\sin(\omega t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (113)$$

Въ параграфѣ 39 мы видѣли, что (ωt) есть уголъ составляемый съ осью нискоу радиусомъ, направленнымъ изъ центра окружности въ движущуюся точку.

Изъ тригонометріи же извѣстно, что

$$\cos(180^\circ + \varphi) = -\cos \varphi; \sin(180^\circ + \varphi) = -\sin \varphi.$$

Слѣдовательно формулы (113) показываютъ, что въ равномерномъ движеніи точки по окружности ускореніе направлено къ центру.

Можно опредѣлить величину и направление ускоренія въ разсматриваемомъ движеніи иначе, именно по формуламъ (105), (106) и (107). Сдѣлаемъ это.

По (91) скорость въ этомъ движеніи равна $R\omega$ слѣдовательно

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt}.$$

Но и R и ω постоянны; слѣдовательно

$$\frac{dv}{dt} = 0 \dots \dots \dots (114)$$

Итакъ, въ равномерномъ движеніи по окружности тангенціальное ускореніе равно нулю; скорость не измѣняется по величинѣ отъ чего и движеніе это называется равномернымъ.

Для опредѣленія, даваемого формулою (106) нормальнаго ускоренія, замѣтимъ, что радиусъ кривизны окружности равенъ ея радиусу R . Замѣняя въ (106) ρ чрезъ R , величину же r чрезъ ωR (по формулѣ 91), находимъ, что нормальное ускореніе въ равномерномъ движеніи по окружности равно $\frac{\omega^2 R^2}{R}$ или:

$$R\omega^2 \dots \dots \dots (115)$$

Зная что $\frac{dr}{dt} = 0$, $r^2 = R\omega^2$ въ разсматриваемомъ движеніи, получимъ по формулѣ (107) $j = R\omega^2$ совершенно согласно съ (112).

§ 51. Сила и ея проложенія на оси координатъ. Зная массу точки m и ускореніе j опредѣлимъ, на основаніи 2-го основнаго закона Ньютона,

силу P , подъ дѣйствиємъ которой точка движется, по формулѣ

$$P = m_j \dots \dots \dots (116)$$

Мы видѣли, что проложенія ускоренія на оси координатъ равны $\frac{dx^2}{dt^2} ; \frac{dy^2}{dt^2} ; \frac{dz^2}{dt^2}$ (формулы 100). Слѣдовательно, проложенія X, Y, Z силы P на оси координатъ опредѣляются по формуламъ

$$\left. \begin{aligned} X &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= m \frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= m \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (117)$$

Можно сказать, что (117) представляютъ собою самыя важныя формулы механики. Онѣ позволяютъ по данной силѣ опредѣлять движение двукратнымъ интегрированиемъ, подобно тому какъ мы это дѣлали въ прямолинейномъ движеніи. Но формулы (117) годятся и въ томъ случаѣ, когда траекторія оказывается криволинейною. Эти уравненія (117) называются дифференціальными уравненіями движенія свободной точки.

§ 52. Движеніе точки брошенной въ пустотѣ наклонно къ горизонту. Покажемъ, какъ устанавливаются въ опредѣленной задачѣ дифференціальныя уравненія движенія данныя въ общемъ видѣ въ (117) и какъ двойнымъ интегрированиемъ получаютъ конечныя уравненія движенія, на примѣрѣ движенія точки брошенной подѣ угломъ къ горизонту и движущейся затѣмъ подѣ влияніемъ силы земнаго тяготѣнія. Мы не будемъ входить въ разсмотрѣніе вліянія, оказываемаго сопротивленіемъ воздуха, и потому будемъ изслѣдовать движеніе точки въ пустотѣ. Движеніе точки въ воздухѣ мало будетъ отличаться отъ разсматриваемаго, если начальная скорость не велика.

Примемъ начальное положеніе тяжелой точки m за начало координатъ. Плоскость (x, z) изберемъ такъ, чтобы она проходила чрезъ направленіе начальной скорости и чтобы горизонтальная ось x совпала съ начальной скоростью острый или прямой (но не тупой) уголъ. Ось z возьмемъ по вертикали вверхъ. На точку, получившую начальную скорость v_0 направленную подѣ угломъ φ къ оси x совпала, дѣйствуетъ только постоянная сила $=mg$ тяжести, которую мы беремъ со знакомъ (—), потому что, при нашемъ выборѣ осей координатъ, сила тяжести направлена въ сторону отрицательныхъ z . Это число $-mg$ и будетъ представлять собою проложеніе дѣйствующей силы на ось z , проложенія же ея на оси x и y равны нулю, такъ какъ сила тяжести составляетъ съ этими осями прямые углы. Слѣдовательно въ разсматриваемомъ движеніи дифференціальныя уравненія (117) примутъ видъ:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0; m \frac{d^2y}{dt^2} = 0; m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg \dots \dots (118)$$

Интегрируя ихъ, получимъ.

$$\frac{dx}{dt} = c_1; \frac{dy}{dt} = c_2; \frac{dz}{dt} = -gt + c_3 \quad . . . (119)$$

Постоянные интеграции c_1, c_2, c_3 опредѣлимъ по начальнымъ даннымъ. Именно, въ началѣ движенія положенія начальной скорости v_0 были:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \varphi; \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0; \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = v_0 \sin \varphi, \quad . (120)$$

Изъ сопоставленія этихъ уравненій съ (119) при $t = 0$ видимъ, что

$$c_1 = v_0 \cos \varphi; c_2 = 0; c_3 = v_0 \sin \varphi.$$

Подставляя эти значения постоянныхъ въ (120), получимъ

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \varphi; \frac{dy}{dt} = 0; \frac{dz}{dt} = v_0 \sin \varphi - gt \quad (121)$$

Интегрируя эти уравненія, получимъ

$$\left. \begin{aligned} x &= t \cdot v_0 \cos \varphi + c_4 \\ y &= c_5 \\ z &= t \cdot v_0 \sin \varphi - \frac{gt^2}{2} + c_6 \end{aligned} \right\} \quad . . . (122)$$

Опредѣлимъ постоянныя интеграции c_4, c_5, c_6 изъ начальныхъ данныхъ. При $t = 0$ мы имѣли:

$$x = 0; y = 0; z = 0.$$

Слѣдовательно, на основаніи (122):

$$c_4 = 0; c_5 = 0; c_6 = 0.$$

Поэтому (122) обращаются въ

$$\left. \begin{aligned} x &= t \cdot v_0 \cos \varphi \\ y &= 0 \\ z &= t \cdot v_0 \sin \varphi - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad . . . (123)$$

Вотъ каковы конечныя уравненія разсматриваемаго движенія. Второе изъ нихъ показываетъ, что траекторія лежитъ въ плоскости (x, z) . Для опредѣленія траекторіи исключимъ t изъ остальныхъ двухъ, получимъ:

$$z = x \cdot \operatorname{tg} \varphi - \frac{gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \varphi} \quad . . . (124)$$

Опредѣлимъ координаты x, z точки высочайшаго подлѣтя. Для этого приравняемъ (какъ это дѣлается при опредѣленіи максимумовъ) произ-

водную ось правой части (124) нулю. Получимъ:

$$tg \varphi - \frac{gx}{v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi} = 0.$$

Отсюда соответствующій наибольшей величинѣ зѣда иксъ будетъ:

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g}.$$

Вставляя эту величину, вмѣсто x , въ (124), получимъ:

$$z = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{2g}.$$

Перенесемъ начало координатъ въ точку (x, z) высочайшаго подъема. Старыя координаты выразятся чрезъ новыя (x', z') такъ:

$$x = x' + \bar{x} = x' + \frac{v_0^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{g}$$

$$z = z' + \bar{z} = z' + \frac{v_0^2}{2g} \cdot \sin^2 \varphi.$$

Вставляя въ (124), получимъ:

$$z' = - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi} \cdot x'^2.$$

Отсюда:

$$x'^2 = - \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{g} \cdot z' \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

Полагая

$$\frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \varphi}{g} = 2p \text{ въ (125), получимъ:}$$

$$x'^2 = - 2pz' \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

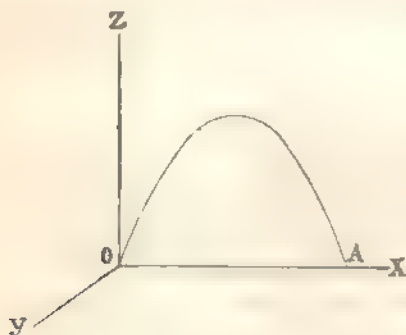
Итакъ, траекторія, представляемая уравненіемъ (126), есть парабола съ вершиною въ точкѣ x наивысшаго поднятія и съ осью направленною вертикально внизъ (фиг. 6).

Опредѣлимъ дальность полета OA , то есть разстояніе отъ первоначальнаго положенія точки до пересѣченія параболы съ осью иксъ. Полагая въ (124) $z=0$, получимъ для икса два значенія: нуль, соответствующій началъному положенію движущейся точки и

$$\frac{2v_0^2}{g} \sin \varphi \cdot \cos \varphi = OA$$

или

$$OA = \frac{v_0^2}{g} \sin (2\varphi).$$



Фиг. 6.

Такъ какъ $\frac{v^2}{g}$, при данной начальной скорости v_0 , есть величина постоянная, величина же $\sin (2\varphi)$ принимаетъ наибольшее значеніе при

$\varphi = 45^\circ$, то слѣдовательно, при движеніи точки въ пустотѣ, наибольшая дальность полета получается при наклоненіи начальной скорости къ горизонту въ 45° .

Центральныя движенія.

§ 53. Общія свойства центральныхъ движеній. Изслѣдуемъ движеніе свободной точки, притягиваемой или отталкиваемой неподвижною точкою, называемою центромъ притяженія или отталкиванія. Такія движенія называются центральными. Если точка не имѣла начальной скорости, то она направится къ центру притяженія; но если она имѣла начальную скорость, направленную не по прямой соединяющей ее съ центромъ, то дѣло будетъ происходить иначе и траекторія можетъ быть криволинейною. Къ разряду центральныхъ движеній относится и движеніе планетъ и кометъ около солнца, служащаго центромъ притяженія, потому что разстоянія между планетами и солнцемъ столь велики сравнительно съ диаметрами этихъ тѣлъ, что и солнца и планеты могутъ быть разсматриваемы какъ матеріальныя точки.

Положимъ, что точка m притягивается неподвижнымъ центромъ, находящимся въ началѣ координатъ. Въ случаѣ притяженія на точку m дѣйствуетъ сила P , направленная къ началу координатъ O . Въ случаѣ отталкиванія на точку m дѣйствуетъ сила направленная по продолженію радіуса-вектора Om . Если будемъ разсматривать и притяженія и отталкиванія, то направленіе силы P будетъ опредѣляться уравненіями.

$$\cos (P, x) = \pm \frac{x}{r}; \cos (P, y) = \pm \frac{y}{r}; \cos (P, z) = \pm \frac{z}{r}, \quad (127)$$

гдѣ чрезъ r обозначенъ радіусъ-векторъ Om . Здѣсь знаки (—) соотвѣствуютъ притяженію, знаки (+) отталкиванію. Если же будемъ считать самую силу P отрицательною въ случаѣ притяженія и положительною въ случаѣ отталкиванія, то въ (127) можно удержать только знакъ (+). Дифференціальныя уравненія движенія получимъ, на основаніи (117), въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} X &= P \cdot \cos (P, x) = P \cdot \frac{x}{r} = m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y &= P \cdot \cos (P, y) = P \cdot \frac{y}{r} = m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z &= P \cdot \cos (P, z) = P \cdot \frac{z}{r} = m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Отсюда имѣемъ:

$$\frac{P}{rm} = \frac{1}{x} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{y} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dt^2}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - y \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ y \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} - z \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ z \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} - x \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (129)$$

Интегрируя эти уравнения, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ y \cdot \frac{dz}{dt} - z \cdot \frac{dy}{dt} &= c_2 \\ z \cdot \frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{dz}{dt} &= c_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (130)$$

Умноживъ 1-ое изъ этихъ уравненій (130) на z , второе на x , третье на y , сложивъ и сдѣлавъ приведеніе, получимъ:

$$c_1 z + c_2 x + c_3 y = 0 \dots \dots \dots (131)$$

Это есть уравненіе плоскости, проходящей чрезъ начало координатъ. Итакъ, траекторія точки m лежитъ въ плоскости (131), проходящей чрезъ центръ притяженія.

§ 54. Законъ площадей. Мы взяли направление осей координатъ совершенно произвольно. Примемъ плоскость (131) траекторіи за плоскость (x, y) . Тогда будетъ:

$$z = 0; \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0.$$

Вмѣсто системы уравненій (130) получимъ одно уравненіе:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c_1 \dots \dots \dots (132)$$

Принимая ось ix совѣсть за полярную ось, начало O за полюсъ и полярныхъ координатъ (r, φ) , имѣемъ:

$$\lg \varphi = \frac{y}{x} \dots \dots \dots (133)$$

Дифференцируя это уравненіе, получимъ:

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{x dy - y dx}{x^2} \dots \dots \dots (134)$$

Но $\cos \varphi = \frac{x}{r}$. Слѣдовательно (134) приметъ видъ:

$$\begin{aligned} \frac{r^2 d\varphi}{x^2} &= \frac{x dy - y dx}{x^2} \\ \text{или} \quad x dy - y dx &= r^2 d\varphi \dots \dots \dots (135) \end{aligned}$$

Дифференциаль сектора равен площади безконечно-малого сектора *ОММ* (фиг. 7) и отличается на безконечно-малую величину 2-го порядка от площади кругового сектора *ОМВ*, который, въ свою очередь, можетъ быть принятъ за треугольникъ съ основаниемъ $r d\varphi$ и высотой r . Поэтому площадь сектора *ОММ* равна $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$ или $\frac{r^2 d\varphi}{2}$. Сравнивая съ (135) видимъ, что

$$\frac{x dy - y dx}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2} = \text{дифференциаль сектора.} \quad (136)$$

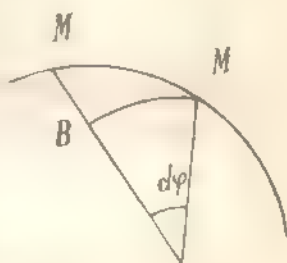
Поэтому (132) можетъ быть написано такъ.

$$\frac{r^2 d\varphi}{dt} = c.$$

или

$$r^2 d\varphi = c_1 dt. \quad (137)$$

Эта формула такимъ образомъ показываетъ, что во всякомъ центральномъ движеніи площади секторовъ описываемыхъ радиусомъ векторомъ пропорциональны времени. Въ этомъ состоитъ законъ площадей, въ центральномъ движеніи радиусъ-векторъ описываетъ въ равныя времена равныя площади.



Фиг. 7.

§ 55. Скорость въ центральномъ движеніи. На основаніи (88) имѣемъ:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2}. \quad (138)$$

Формулы преобразования декартовыхъ координатъ въ полярныя таковы:

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi.$$

Изъ нихъ находимъ:

$$\left. \begin{aligned} dx &= r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi + \cos \varphi \cdot dr \\ dy &= r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi + \sin \varphi \cdot dr \end{aligned} \right\}. \quad (139)$$

Возводя эти уравненія почленно въ квадратъ и складывая, получимъ:

$$(dx)^2 + (dy)^2 = r^2 (d\varphi)^2 + (dr)^2. \quad (140)$$

Вставляя въ (138), получимъ:

$$v^2 = \frac{r^2 \cdot (d\varphi)^2 + (dr)^2}{dt^2} = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2. \quad (141)$$

Но

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Поэтому

$$v^2 = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \right]. \quad (142)$$

По закону площадей $r \cdot d\varphi = c \cdot dt$. Следовательно!

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}.$$

Вставляя эту величину, вмѣсто dt , въ (142), получимъ:

$$v^2 = \left(\frac{cd\varphi}{r \cdot d\varphi} \right)^2 \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]$$

или

$$v^2 = \frac{c^2}{r^4} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right] = c^2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]. \quad (143)$$

Это выраженіе скорости упростится, если введемъ переменное $u = \frac{1}{r}$. Для этого придется положить:

$$du = -\frac{dr}{r^2} = \frac{1}{r^4} u; \quad \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2.$$

Тогда (143) приметъ видъ:

$$v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right]. \quad (144)$$

§ 56. Сила въ центральномъ движеніи. На основаніи (128) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P}{m} \cdot \frac{x}{r} &= \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{P}{m} \cdot \frac{y}{r} &= \frac{d^2 y}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Помноживъ первое изъ этихъ уравненій на dx , второе на dy и сложивъ, получимъ:

$$\frac{P}{m} \cdot \frac{(x dx + y dy)}{r} = dx \cdot \frac{dx}{dt} + dy \cdot \frac{dy}{dt^2}. \quad (146)$$

Извѣстно, что выраженіе $x dx + y dy$ получается при дифференцированіи уравненія $x^2 + y^2 = r^2$. Именно: дифференцируя его, получимъ:

$$x dx + y dy = r dr. \quad (147)$$

Вставляя въ (146), получимъ:

$$\frac{P}{m} \cdot \frac{r dr}{r} = dx \frac{dx}{dt} + dy \frac{dy}{dt^2}$$

или

$$dx \frac{dx}{dt^2} + dy \frac{dy}{dt^2} = -\frac{P}{m} \cdot \frac{du}{u^2}. \quad (148)$$

Но лѣвая часть этого уравненія (148) можетъ быть получена дифференцированіемъ величины:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right],$$

которая равна $\frac{1}{2} (v^2)$. Следовательно из (148) получается.

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = - \frac{P}{m} \cdot \frac{du}{u^2}$$

или

$$\frac{P}{m} = - \frac{u^3}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{du} \dots \dots \dots (149)$$

Дифференцируя же по u уравнение (144), получим:

$$\frac{d(v^2)}{du} = 2c^2 \left(u + \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{du} \right)$$

или

$$\frac{d(v^2)}{du} = 2c^2 \left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right]$$

Вставляя въ (149), получимъ:

$$\frac{P}{m} = - c^2 u^3 \left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2} \right] \dots \dots \dots (150)$$

§ 57. **Кеплеровы законы.** Кеплеръ, изъ своихъ собственныхъ наблюдений и изъ наблюдений своихъ предшественниковъ замѣтилъ слѣдующіе законы въ движеніи планетъ:

- 1) Каждая планета движется по эллиису, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.
- 2) Площади, описываемыя радиусами-векторами, проведенными отъ солнца къ планетамъ, возрастаютъ пропорционально времени.
- 3) Квадраты времени обращения планетъ относятся между собою какъ кубы большихъ осей ихъ траекторій (орбитъ).

Покажемъ, какъ изъ этихъ кеплеровыхъ законовъ, выражающихъ просто результаты наблюдаемыхъ фактовъ, вывести тотъ великій открытый Ньютонемъ законъ, по которому оказывается, что всѣ тѣла взаимно притягиваются съ силою пропорциональною массамъ и обратно пропорциональною квадратамъ разстояній.

§ 58. **Законъ площадей** характеризуетъ центральное движеніе. Во-первыхъ покажемъ, что существованіе 2-го кеплерова закона (то есть закона площадей) доказываетъ, что движеніе планеты происходитъ подъ дѣйствіемъ притяженія къ центру. Теорема обратная къ высказанной въ § 54-омъ).

Если движеніе точки подчиняется закону площадей, то, согласно сказанному въ § 53:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= c_1 \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= c_2 \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= c_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\left. \begin{aligned} x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} &= 0 \\ y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} &= 0 \\ z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (152)$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Называя величину этихъ отношеній k , получимъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= kx \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= ky \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= kz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (153)$$

Возводя эти равенства почленно въ квадраты, складывая и принимая, что $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, получимъ:

$$\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2 = k^2 r^2 \quad \dots \quad (154)$$

Изъ (153) и (154) слѣдуетъ:

$$k^2 = \frac{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2}{x^2} + \frac{\left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2}{y^2} + \frac{\left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2}{z^2} = \frac{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2}{x^2} + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2} \quad \dots \quad (155)$$

Но сила равна произведенію массы на ускореніе; поэтому и на основаніи (109) имѣемъ:

$$P = m \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)^2} \quad \dots \quad (156)$$

Но на основаніи (117)

$$\left. \begin{aligned} P \cdot \cos (P, x) &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ P \cdot \cos (P, y) &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ P \cdot \cos (P, z) &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (157)$$

Изъ (155), (156) и (157) слѣдуетъ:

$$\cos (P, x) = \pm \frac{x}{r};$$

$$\cos (P, y) = \pm \frac{y}{r},$$

$$\cos (P, z) = \pm \frac{z}{r}.$$

Эти послѣднія три уравненія показываютъ, что сила направлена по радиусу-вектору, исходящему изъ начала координатъ, то есть что движеніе происходитъ подъ вліяніемъ центральной силы.

§ 59. Выводъ закона ньютоновскаго притяженія изъ законовъ Кеплера. Итакъ, первая часть великаго открытія Ньютона доказана: планеты движутся подъ дѣйствіемъ центральной силы. Остается доказать вторую часть: какъ дѣйствуетъ эта сила. Согласно первому кеплерову закону планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце.

Уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ таково:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos \varphi} \dots \dots \dots (158)$$

Для здѣсь подставимъ $\frac{1}{r} = u$, получимъ:

$$u = \frac{1}{p} (1 + e \cdot \cos \varphi) \dots \dots \dots (159)$$

Дифференцируя, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\varphi} &= -\frac{e}{p} \cdot \sin \varphi \\ \frac{d^2 u}{d\varphi^2} &= -\frac{e}{p} \cdot \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (160)$$

Вставляя опредѣляемыя по (159) и (160) величины u и $\frac{d^2 u}{d\varphi^2}$ въ (150), получимъ:

$$\frac{P}{m} = \frac{e^2 (1 + e \cdot \cos \varphi)^2}{p^2} \cdot \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi) - \frac{e}{p} \cdot \cos \varphi \Big|$$

или на основаніи (158)

$$\frac{P}{m} = -\frac{e^2 (1 + e \cdot \cos \varphi)^2}{p^3} \cdot \frac{1}{p} = -\frac{e^2}{p} \cdot \frac{1}{r^3}.$$

Итакъ:

$$P = -\frac{mc^2}{p \cdot r^3} \dots \dots \dots (161)$$

сила оказывается притягивающею и обратно-пропорціональною квадрату разстоянія.

Великое открытіе Ньютона подготовлено было цѣлымъ рядомъ изслѣдованій. Древніе астрономы подготовили своими наблюденіями богатый ма-

материалъ для изслѣдованія, но для объясненія движенія планетъ придумали кристаллыныя сферы и, предполагая, что планеты обращаются около земли, считали ихъ истинное движеніе весьма сложнымъ. Коперникъ (1473—1543) доказалъ, что земля и планеты движутся около солнца. Галилей (1564—1642) изслѣдовалъ движеніе падающихъ тѣлъ. Кеплеръ (1571—1630) высказалъ свои законы и наконецъ Ньютонъ (1642—1727) сдѣлалъ свое великое открытіе, окончательно разбившее кристаллыныя сферы древнихъ, доказавшее, что законѣмѣрность и устойчивость солнечной системы объясняется тѣмъ же тяготѣніемъ, которое служитъ причиною паденія тѣлъ и открывшее широкіе горизонты въ дѣлѣ изученія природы. Ньютонъ же (одновременно съ Лейбницемъ) изобрѣлъ дифференціальное исчисленіе и всю механику подчинилъ своимъ основнымъ тремъ законамъ.

Задача. Определить движеніе точки, притягиваемой матеріальными центрами пропорционально разстояніямъ.

Не трудно видѣть, что движеніе будетъ происходить въ некоторой плоскости. Примемъ ее за плоскость (x, y) . Уравненія движенія будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 y.$$

гдѣ μ — коэффициентъ пропорциональности. Для интегрированія этихъ уравненій положимъ:

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

Тогда 1-ое изъ дифференціальныхъ уравненій задачи дастъ:

$$x' \frac{dx'}{dx} = -\mu^2 x.$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$x^2 = c - a t^2.$$

Отсюда:

$$x = \frac{dx}{dt} + \sqrt{c - \mu^2 x^2}.$$

или

$$+ dt = - \frac{dx}{\sqrt{c - \mu^2 x^2}}.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\pm \mu (t - \tau) = \arccos \left(\frac{\mu x}{c} \right)$$

или

$$x = \frac{c}{\mu} \cos [\mu (t - \tau)] = A \cos \mu t + B \sin \mu t.$$

Подобное же уравненіе получимъ для y . Итакъ, уравненія движенія

въ конечномъ видѣ будутъ:

$$x = A \cos (\mu t) + B \sin (\mu t)$$

$$y = A' \cos (\mu t) + B' \sin (\mu t)$$

Для нахождения траекторіи надо исключить изъ этихъ уравненій t . Для этого определяемъ сначала изъ нихъ:

$$\sin (\mu t) = \frac{A'x - Ay}{A'B - AB'};$$

$$\cos (\mu t) = \frac{By - B'x}{A'B - AB'}.$$

Возводя эти уравненія, пооченно, въ квадратъ и сложивъ, получимъ:

$$(Ax - Ay)^2 + (By - B'x)^2 = (AB - A'B')^2$$

или

$$(A'^2 + B'^2)x^2 + (A^2 + B^2)y^2 - 2(AA' + BB')xy = (AB - A'B')^2$$

Это уравненіе траекторіи представляетъ собою эллипсъ, центръ котораго находится въ началѣ координатъ, то есть въ центрѣ притяженія.

Изъ уравненій движенія въ конечномъ видѣ замѣчаемъ, что точка возвращается на свое мѣсто въ теченіи времени $t = \frac{2\pi}{\mu}$. Итакъ, время T полнаго обращенія точки опредѣляется изъ формулы:

$$T = \frac{2\pi}{\mu}.$$

Интересно, каково уравненіе живой силы въ этомъ движеніи. Для нахождения его помножимъ 1-ое изъ дифференціальнахъ уравненій задачи на dx , второе на dy и сложимъ. Получимъ:

$$dx \frac{d^2x}{dt^2} + dy \frac{d^2y}{dt^2} = -\mu^2 (x dx + y dy)$$

или:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2} = -\mu^2 (x dx + y dy).$$

Таково уравненіе живой силы.

Уравненіе площадей, какъ и во всякомъ центральномъ движеніи, будетъ:

$$r^2 d\varphi = c dt.$$

ГЛАВА III.

Движеніе несвободной точки.

§ 60. Несвободная точка. Если точка принуждена двигаться по какой-нибудь поверхности или по какой-нибудь линіи, то она называется *несво-*

болотою. Напримѣръ: точка, соединенная съ другою неподвижною точкою помощью нерастяжимаго и негибкаго стержня, имѣющаго массу весьма малую сравнительно съ массою разсматриваемой точки, принуждена двигаться по *поверхности* шара описанной около неподвижной точки радиусомъ равнымъ длинѣ стержня; точка, соединенная такими стержнями съ двумя неподвижными точками *A* и *B*, принуждена двигаться по сферѣ описанной около *A* и по сферѣ описанной около *B*, то есть по *линии* пересѣченія этихъ сферъ.

§ 61. Движеніе точки по поверхности. Изслѣдуемъ сначала движеніе точки по поверхности, опредѣляемой уравненіемъ:

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162)$$

Если точка, принужденная находится на этой поверхности, подвержена дѣйствію силы *P*, то, разлагая силу *P* на двѣ силы, изъ которыхъ одна направлена по нормали, а другая — по касательной, замѣтимъ, что слагающая *T*, направленная по касательной, не будетъ давить на поверхность, но будетъ двигать точку *m* по поверхности. Напротивъ того нормальная слагающая *N* нисколько не будетъ двигать точку, но будетъ обуславливать давленіе точки на поверхность. Поэтому, при вычисленіи давленія точки на поверхность, мы должны брать въ расчетъ только нормальное давленіе *N*.

Обращая же вниманіе на это давленіе можно свести изученіе движенія *несвободной* точки къ изслѣдованію движенія такой *свободной* точки, которая находится подъ дѣйствіемъ не только заданныхъ силъ, но еще и давленія, которое производится на точку поверхностью и которое является противодѣйствіемъ давленію, производимому точкою на поверхность.

Обозначая чрезъ ($-N$) давленіе, производимое точкою на поверхность и слѣдовательно чрезъ *N* сопротивленіе поверхности, мы можемъ разсматривать точку какъ свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ и сопротивленія *N*, которое остается пока неопредѣленнымъ. Поэтому, на основаніи (117) получаются слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія.

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + N \cos(N, x) \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + N \cos(N, y) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + N \cos(N, z) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

Заключающіеся въ этихъ уравненіяхъ косинусы угловъ наклоненія нормали къ осямъ координатъ опредѣляются извѣстными формулами диффе-

ренциального исчисления по (162) такъ

$$\left. \begin{aligned} \cos(N, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos(N, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos(N, z) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (164)$$

Что же касается N , то эта величина подлежит исключению. Исключивъ N изъ трехъ уравненій (163), получимъ два уравненія; присоединивъ къ нимъ еще уравненіе (162) поверхности, получимъ всего три уравненія, которыхъ вполнѣ достаточно для выраженія координатъ x, y, z чрезъ время t .

Примѣръ. Определить движеніе тяжелой точки, движущейся по поверхности вертикальнаго цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ подъ вліяніемъ силы тяжести и начальной скорости v_0 , сообщенной въ горизонтальномъ направленіи, предполагая, что точка не соити съ поверхности цилиндра. Ось z беремъ по вертикали внизъ. Здѣсь уравненіе (162) имѣетъ видъ:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2 = 0 \dots \dots (165)$$

Вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \dots \dots (166)$$

Здѣсь дѣйствующая сила есть тяжесть mg ; ускореніе, производимое ею, направлено по оси z и равно g . Слѣдовательно:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = mg.$$

Поэтому уравненія (163) принимаютъ видъ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{Nx}{R} \dots \dots (167)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{Ny}{R} \dots \dots (168)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg \dots \dots (169)$$

Исключая N изъ (167) и (168), получимъ:

$$y \frac{dx^2}{dt^2} - x \frac{dy^2}{dt^2} = 0.$$

Интеграль этого уравненія таковъ:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = C \dots \dots \dots (170)$$

Въ началѣ движенія:

$$y = 0; \frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} = v_0; x = R.$$

Вставляя въ (170), получимъ:

$$C = - Rv_0.$$

Слѣдовательно (170) приметъ видъ:

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = - Rv_0 \dots \dots \dots (171)$$

Дифференцируя (165), получимъ:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0 \dots \dots \dots (172)$$

Исключая $\frac{dy}{dt}$ изъ (171) и (172), находимъ

$$y \frac{dx}{dt} + \frac{x^2}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = - Rv_0.$$

или

$$(x^2 + y^2) \frac{dx}{dt} = - Rv_0 y$$

или

$$R^2 \frac{dx}{dt} = - Rv_0 \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Отсюда:

$$\frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = - v_0 dt.$$

Интегрируя, получимъ:

$$x = R \cdot \cos \left(\frac{v_0 t}{R} \right) \dots \dots \dots (173)$$

$$y = R \cdot \sin \left(\frac{v_0 t}{R} \right) \dots \dots \dots (174)$$

Интегрируя (169) и принимая $m = 1$, найдемъ

$$\frac{dz}{dt} = gt + v.$$

При $t = 0$ имѣемъ $\frac{dz}{dt} = 0$.

Слѣдовательно:

$$\frac{dz}{dt} = gt$$

Интегрируя еще разъ, находимъ:

$$s = \frac{gt^2}{2} + c_2.$$

При $t = 0$ имѣемъ $s = 0$.

Слѣдовательно:

$$s = \frac{gt^2}{2} \dots \dots \dots (175)$$

Уравненія (173), (174), (175) суть искомыя уравненія движенія въ конечномъ видѣ. Изъ нихъ мы видимъ, что точка движется по вѣющей линіи.

§ 62 Движеніе точки по линіи. Если точка принуждена двигаться по линіи, то есть по пересѣченію поверхностей:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (176)$$

то, обозначая чрезъ N и N'' сопротивленія, оказываемыя этими поверхностями, получимъ, подобно тому какъ получили (163), такіа уравненія

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= X + N \cdot \cos(N, x) + N'' \cdot \cos(N'', x) \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= Y + N \cdot \cos(N, y) + N'' \cdot \cos(N'', y) \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= Z + N \cdot \cos(N, z) + N'' \cdot \cos(N'', z) \end{aligned} \right\} \dots \dots (177)$$

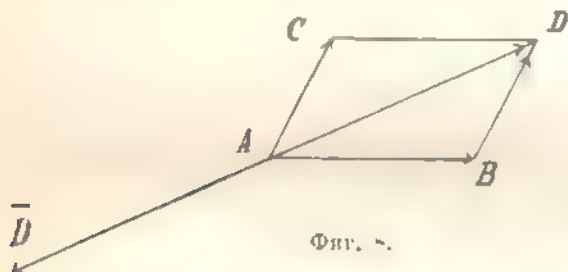
По исключеніи N и N'' изъ (177), получимъ одно уравненіе. Прибавляя къ нему два уравненія (176), получимъ три уравненія, достаточныя для выраженія (x, y, z) чрезъ t .

§ 63. Равновѣсіе какъ частный случай движенія. Можетъ случиться такъ, что нѣсколько силъ, дѣствующихъ на точку, взаимно уничтожаются и точка находится въ равновѣсіи. Это равновѣсіе будетъ *статическимъ*, если точка не имѣетъ начальной скорости, тогда она останется въ покоѣ. Равновѣсіе будетъ *динамическимъ*, если точка имѣетъ начальную скорость; тогда она будетъ двигаться такъ, какъ будто никакія силы на нее не дѣйствуютъ, если въ теченіи движенія силы продолжаютъ уничтожаться.

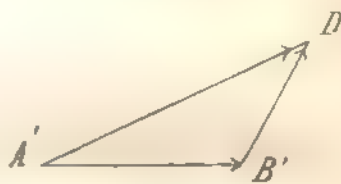
§ 64. Равновѣсіе свободной точки. Свободная точка, слѣдовательно, будетъ въ равновѣсіи, если равнодѣйствующая всѣхъ силъ равна нулю. Это условіе соблюдается, если каждая сумма проложеній всѣхъ силъ на каждую изъ осей координатъ равна нулю. Поэтому уравненія равновѣсія свободной точки таковы:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (178)$$

§ 65. Многоугольникъ силъ. На основаніи слѣдствія, выведеннаго Ньютономъ изъ его II-го закона (§ 3), равнодѣйствующая двухъ силъ AB и AC (фиг. 8) равна діагонали AD параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ. Слѣдовательно точка A находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силъ AB , AC и AD , изъ коихъ AD равна и противоположна равнодѣйствующей AD силъ AB и AC . Изберемъ какую-нибудь точку A (фиг. 9) и проведемъ AB равную и параллельную AB , BD' равную и параллельную AC . Соединивъ A' съ D' , замкнемъ треугольникъ $A'B'D'$,

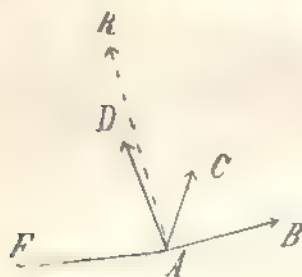


Фиг. 8.

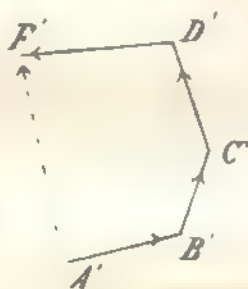


Фиг. 9.

называемый *треугольникомъ силъ*. Очевидно $AD' = AD$. Изъ сравненія фигуръ видимъ: 1) замыкающая сторона $A'D'$ треугольника силъ, считающаяся (при непрерывномъ обходѣ треугольника по его периметру) въ противоположную сторону, представляетъ, по величинѣ и направленію, равнодѣйствующую силъ изображенныхъ остальными сторонами треугольника, 2) точка находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ трехъ силъ,



Фиг. 10.



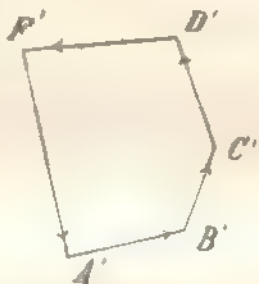
Фиг. 11.

представляемыхъ въ *треугольникъ силъ*, по величинѣ и по направленію его сторонами $A'B'$, $B'D'$, $D'A'$, считающимися въ одномъ направленіи; 3) точка находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ трехъ силъ тогда, и только тогда, когда треуголь-

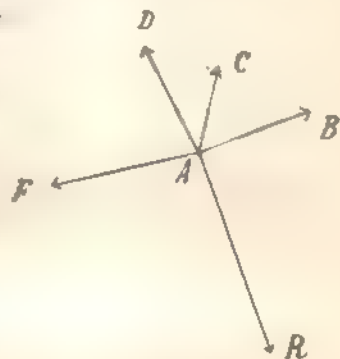
никъ силъ замыкается (когда его можно построить) (фиг. 9).

Если на точку дѣйствуетъ много силъ (фиг. 10), то можно было бы найти ихъ равнодѣйствующую послѣдовательнымъ построеніемъ параллелограммовъ, но получился бы сложный чертежъ. Проще можно поступить такъ (фиг. 11). Даны силы AB , AC , AD , AF . Избираемъ произвольную точку A' и откладываемъ отъ нея послѣдовательно прямыя равныя и параллельныя даннымъ силамъ, такъ чтобы каждая послѣдующая прямая шла отъ конца предыдущей. Получимъ *многоугольникъ силъ* $A'B'C'D'F'$.

Если представим себѣ диагонали проведенныя къ его вершинамъ изъ A' , то получимъ рядъ *треугольниковъ силъ*. Изъ указаннаго свойства треугольника силъ слѣдуетъ. 1) Замыкающая сторона $A'K'$ многоугольника, считаема, при обходѣ периметра, въ направленіи противоположномъ остальнымъ сторонамъ, представляетъ, по величинѣ и по направленію, равнодѣйствующую AR силъ, представляемыхъ остальными сторонами. 2) Точка находится въ равновѣсїи, если многоугольникъ силъ замкнуть (фиг. 12 и 13). Надо обратить вниманіе на то, что на фиг. 10 и 11 дано 4 силы и мы замыкаемъ треугольникъ равнодѣйствующею $A'F'$. Тогда какъ на фиг. 12 и 13 дано 5 силъ и онѣ самъ собою замыкаются.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Все это сводится къ слѣдующему.

Правило I. Любая сторона многоугольника силъ изображаетъ собою, по величинѣ и направленію, равнодѣйствующую остальныхъ силъ, если считается въ сторону имъ противоположную при обходѣ периметра.

Правило II. Точка находится въ равновѣсїи, если многоугольникъ силъ оказывается замкнутымъ.

Замѣтимъ, что стороны многоугольника силъ могутъ лежать и въ разныхъ плоскостяхъ, такъ что эти правила остаются справедливыми и для силъ не лежащихъ въ одной плоскости.

§ 66. **Равновѣсїе несвободной точки.** Равновѣсїе несвободной точки какъ частный случай движенія такой точки, опредѣляется такими уравненіями, которыя получаются изъ (163) или изъ (177), полагая въ нихъ вторыя производныя отъ координатъ по времени равными нулю.

§ 67. **Общее условіе равновѣсїя, выводимое изъ начала возможныхъ перемѣщеній** Равновѣсїе несвободной точки можно изслѣдовать, какъ это показалъ Лагранжъ, другимъ путемъ, дающимъ болѣе широкій и необыкновенно плодотворный взглядъ на дѣло.

Лагранжъ основалъ всю статику (ученіе о равновѣсїи) на *принципѣ возможныхъ перемѣщеній*, который состоитъ въ томъ, что для равновѣсїя необходимо и достаточно, чтобы элементарная работа была бы не болѣе нуля.

Для приложенія этого принципа достаточно разсматривать безконечно малыя перемѣщенія, которыя, благодаря ихъ малости, всегда могутъ быть приняты за прямолинейныя.

Положимъ, что прямая mn (фиг. 14) представляетъ направленіе ка-

Замѣняя въ (180) косинусы правой части чрезъ ихъ выраженія, данныя въ (181) и помножая обѣ части на $P \delta s$, получимъ:

$$P \cdot \cos (P, \delta s) \cdot \delta s = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \dots (184)$$

Выраженіе, стоящее въ лѣвой части этого равенства, представляетъ собою, на основаніи (32), работу на пути возможнаго перемѣщенія δs . Эту работу на безконечно-маломъ пути δs называемъ *элементарною*. Слѣдовательно:

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \text{элементарная работа.}$$

Поэтому принципъ возможныхъ перемѣщеній:

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \equiv 0 \dots (185)$$

можетъ быть выраженъ слѣдующими словами: *точка находящаяся въ равновѣсіи если элементарная работа дѣйствующихъ на нее силъ не больше нуля.*

§ 68. Выводъ уравненій равновѣсія свободной точки изъ общаго условія равновѣсія. Если точка свободна, то всякія ея перемѣщенія возможны. Слѣдовательно для свободной точки величины δx , δy , δz совершенно произвольны. Но, при произвольности этихъ величинъ, неравенство (183) можетъ существовать только въ томъ случаѣ, если стоящее при нихъ коэффициенты равны нулю, то есть если:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0 \dots (186)$$

Уравненіе тождественныя съ (178) потому, что въ (186) X , Y , Z суть проложія равны дѣйствующей P всѣхъ силъ.

§ 69. Выводъ, изъ общаго условія (183), уравненій равновѣсія точки, которая принуждена оставаться на поверхности. Если точка принуждена оставаться на поверхности, то уже δx , δy , δz не произвольны, и мы сейчасъ выведемъ зависимость, которая между ними существуетъ. Разлагая

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f(x, y, z)$$

въ рядъ по формулѣ Тейлора и ограничиваясь первымъ членомъ ряда, получимъ:

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) - f(x, y, z) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \dots (187) \end{aligned}$$

Но оба члена лѣвой части этого равенства равны нулю, такъ какъ точка, и въ начальномъ своемъ положеніи и продвинувшись на вѣроятное перемѣщеніе, остается на поверхности. Слѣдовательно и вторая часть равенства (187) равна нулю, то есть:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0 \dots (188)$$

Вотъ какая зависимость существуетъ между δx , δy , δz . Кроме того мы имѣемъ общее условие равновѣсія:

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \leq 0. \quad (183)$$

Помноживъ лѣвую часть (187) на неопредѣленный множитель λ и сложивъ съ (183), получимъ:

$$\left(X + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot \delta x + \left(Y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \delta y + \left(Z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \delta z = 0. \quad (188)$$

Двѣ величины изъ δx , δy , δz совершенно произвольны, третья же опредѣляется изъ этихъ двухъ при помощи (187). Пусть эта третья величина будетъ δx . Опредѣлимъ λ такъ, чтобы коэффициентъ при δx въ (188) былъ равенъ нулю. Для этого опредѣлимъ λ изъ уравненія

$$X + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (189)$$

Тогда (188) уже не будетъ содержать δx ; остальные же δy и δz совершенно произвольны, и потому уравненіе (188) возможно только, если коэффициенты при δy и δz равны нулю, то есть:

$$\left. \begin{aligned} Y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (190)$$

Уравненія (189) и (190) и представляютъ собою уравненія равновѣсія точки принужденной оставаться на поверхности

$$f(x, y, z) = 0.$$

§ 70. Выводъ, изъ общаго условія (183) уравненій равновѣсія точки, принужденной оставаться на линіи. Если точка принуждена оставаться на линіи, опредѣляемой пересѣченіемъ поверхностей

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ F(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (191)$$

то изъ этихъ уравненій по теоремѣ Тейлора получимъ.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (192)$$

Кроме того имѣемъ общее условие равновѣсія

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z \leq 0. \quad (193)$$

Помножая 1-ое изъ (192) на λ_1 , второе изъ (192) на λ_2 и складывая съ (193), получимъ:

$$\begin{aligned} & \left(X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x + \left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y + \\ & + \left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} \right) \delta z \approx 0 \quad . \quad . \quad . \quad (194) \end{aligned}$$

Опредѣлимъ λ_1 и λ_2 изъ требованія, чтобы коэффициенты при δx и δy въ (194) были равны нулю. Тогда останется только третій членъ въ лѣвой части (194), и, вслѣдствіе произвольности δz , коэффициентъ этого члена тоже долженъ быть равенъ нулю. Поэтому имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

Таковы уравненія равновѣсія точки, принужденной оставаться на линіи

$$f(x, y, z) = 0$$

$$F(x, y, z) = 0$$

§ 71. Уравненія равновѣсія точки въ случаѣ связи, выраженной неравенствомъ. Если точка можетъ двигаться не только по поверхности

$$f(x, y, z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

но и въ одну какую нибудь опредѣленную сторону отъ нея, то можно сказать, что точка можетъ сойти на сосѣднюю поверхность

$$f(x, y, z) = \alpha, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

которая лежитъ, смотря по условію, или въ области

$$f(x, y, z) > 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

или въ области

$$f(x, y, z) < 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (199)$$

Примѣръ 1-ый. Точка лежитъ на внѣшней поверхности твердой сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = 0,$$

Такая точка можетъ сойти въ область

$$x^2 + y^2 + z^2 > R^2 > 0,$$

внѣшнюю по отношенію къ данной сферѣ, то есть перейти на сосѣднюю сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = \alpha$$

гдѣ α положительно.

Примеръ 2-ой. Точка лежитъ на внутренней сторонѣ поверхности сферы

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

Такая точка можетъ сойти въ область

$$x^2 + y^2 - R^2 < 0,$$

лежащую внутри сферы, то есть перейти на соседнюю сферу

$$x^2 + y^2 - R^2 = \alpha,$$

гдѣ α отрицательно.

(Взяи, выражая пряма неравенствами вида (198) или (199) называются *неудерживающими*.)

Замѣтимъ, что условіе равновѣсія (183) можетъ быть представлено въ видѣ

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = \delta U, \dots \dots \dots (200)$$

если подъ обозначеніемъ δU будемъ разумѣть неопредѣленную безконечно-малую величину не превосходящую нуля. Изъ (197) имѣемъ.

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = \delta \alpha. \dots \dots \dots (201)$$

Помноживъ это уравненіе (201) на неопредѣленного множителя λ и сложивъ съ (200) получимъ:

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \right) \delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \right) \delta z = \delta U + \lambda \delta \alpha \quad (202)$$

Двѣ величины изъ $\delta x, \delta y, \delta z$ совершенно произвольны, третья же связана съ ними уравненіемъ (201). Пусть эта третья величина будетъ $\delta \alpha$. Выберемъ λ такимъ, чтобы коэффициенты при $\delta \alpha$ въ (202) были равны нулю. Тогда, вследствие произвольности δy и δz ихъ коэффициенты въ уравненіи (202) и правая часть этого уравненія должны быть равны нулю. Поэтому имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ \delta U + \lambda \delta \alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (203)$$

Первыя три изъ уравненій (203) даютъ:

$$P = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \quad (204)$$

$$\begin{aligned} \frac{X}{P} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \frac{Y}{P} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \\ \frac{Z}{P} &= - \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{aligned} \quad (205)$$

Слѣдовательно, для равновѣсія точки, дѣйствующая сила должна быть направлена по нормали къ поверхности

$$f(x, y, z) = 0.$$

Послѣднее изъ уравнений (203) имѣющее видъ

$$\lambda U + \lambda \delta x = 0, \dots \dots \dots (206)$$

опредѣляетъ знакъ множителя λ . Именно черезъ δU мы обозначали величину, не больше нуля; слѣдовательно (206) можетъ удовлетвориться только тогда, когда λ и δx имѣютъ одинаковые знаки. Такъ какъ сила P есть величина абсолютная, то благодаря уравненію (204), множитель λ и радикаль $\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$ должны имѣть одинаковые знаки. Слѣдовательно, знакъ этого радикала таковъ, какъ знака δx .

§ 72. Задача: найти положеніе равновѣсія тяжелой точки на сферѣ?

Пояснимъ сказанное въ предыдущемъ параграфѣ, и особенно правило знаковъ при радикалѣ, на весьма простой видѣ, выраженной въ заглавіи настоящаго параграфа.

Въѣмемъ начало координатъ въ центрѣ сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \dots \dots \dots (207)$$

Въѣмемъ ось z по вертикали внизъ. Имѣемъ

$$P = mg; \quad X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = mg,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z;$$

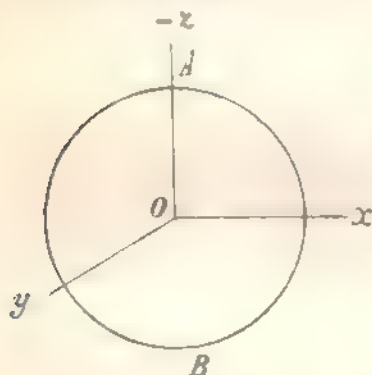
$$+ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} = 2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = + 2R \dots (208)$$

Уравнения (205) дадутъ

$$z = 0; \quad u = 0; \quad \dots \quad (209)$$

$$z = - (+R) \quad (210)$$

Уравнения (209) показываютъ, что положенія равновѣсія могутъ быть только на вертикальной оси сферы (фиг. 15). Уравнение (210) показываетъ, что положенія равновѣсія могутъ быть только на сферѣ. Въ (210) знакъ при R внутри скобки надо взять такой какъ при радикалѣ, какъ это видно изъ (208).



Фиг. 15.

Если точка не можетъ покинуть сферы, т. е. при радикалѣ нужно удерживать оба знака; изъ (210) получимъ $z = \mp R$; положенія равновѣсія будутъ въ A и B .

Если точка лежитъ внутри сферы, то δz отрицательно; слѣдовательно при радикалѣ надо взять $(-)$; изъ (210) получимъ $z = -(-R)$ или $z = +R$; положеніе равновѣсія будетъ только въ B , такъ какъ положительная ось z идетъ внизъ.

Если точка лежитъ внѣ сферы, то δz положительно; при радикалѣ надо взять $(+)$; изъ (210) получимъ $z = -(+R)$ или $z = -R$; положеніе равновѣсія будетъ только въ A .

§ 73. Уравнения равновѣсія точки въ случаѣ двухъ связей, выраженныхъ неравенствами. Если имѣемъ неудерживающія связи

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, z) &= a \\ F(x, y, z) &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

то разсуждая совершенно такъ же какъ въ § 72 получимъ

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ \lambda_1 \delta\alpha + \lambda_2 \delta\beta + \delta U &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (212)$$

§ 74 Начало Даламбера. Знаменитый французскій энциклопедистъ и математикъ Даламберъ (D'Alembert, 1717—1789) привелъ изученіе движенія несвободной точки къ изученію ея равновѣсія при помощи особыхъ соображеній, получившихъ названіе начала Даламбера. Выводъ уравненій движенія несвободной точки при помощи начала Даламбера имѣетъ, какъ мы увидимъ въ слѣдствіи, чрезвычайное важное значеніе въ механикѣ; онъ

болѣе плодотворно, чѣмъ выводъ этихъ уравненій, сдѣланный нами въ § 62, 63 и 64.

Если точка m , находясь подъ дѣйствіемъ силы P , не можетъ попятнута поверхности (фиг. 16), то ее можно разсматривать какъ свободную, находящуюся подъ дѣйствіемъ не только силы P но и направленной по внутренней нормали реакции N . Поэтому равнодѣйствующая сила P , и N , дѣйствія на точку какъ на свободную, равна $m\ddot{r}$ и называется *уравновѣсительной* силой. Изъ (фиг. 16) видно, что силы P и $(-m\ddot{r})$ слагаются въ $(-N)$, которая уравновѣшивается реакціею N . Примемъ обозначенія:

P дѣйствующая сила,

$(-m\ddot{r})$ сила инерціи,

$(-N)$ потерянная сила.

Мы видѣли, что 1) Потерянная сила $(-N)$ есть равнодѣйствующая дѣйствующей силы P и силы инерціи $(-m\ddot{r})$, 2) Потерянная сила уравновѣшивается реакціею N . Въ этихъ двухъ положеніяхъ и состоитъ принципъ Даламбера. Проекции силы P обозначимъ черезъ X, Y, Z . Не трудно видѣть, что: проекции силы $(-m\ddot{r})$ инерціи суть:

$$\left(-m \frac{d^2 x}{dt^2} \right); \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2} \right); \left(-m \frac{d^2 z}{dt^2} \right)$$

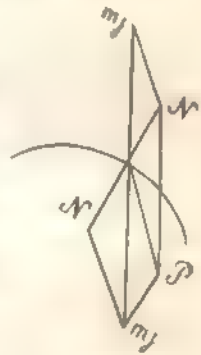
проекціи потерянной силы суть:

$$\left. \begin{aligned} X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (213)$$

§ 75 Уравненія движенія несвободной точки, выводимыя изъ начала Даламбера. Это начало можетъ быть выражено еще такъ: *примененія движенія несвободной точки суть уравненія равновѣсія потерянной силы*, положенія которой выражаются формулами (213). Поэтому достаточно, вмѣсто X, Y, Z , подставить въ уравненія равновѣсія (20) величины (213), чтобы получить уравненія движенія несвободной точки, которыя поэтому будутъ таковы:

$$\left. \begin{aligned} X - m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \\ Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ \delta U + \delta x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (214)$$

Гдѣ $\delta U + \delta x = 0$ есть уравненіе связи.



Фиг. 16

Если точка подчинена двумъ связямъ, то надо пользоваться не (203), а (212). Тогда получимъ:

$$\left. \begin{aligned} X - m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ Y - m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \\ Z - m \frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ \lambda_1 \delta x + \lambda_2 \delta y + \delta U &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (215)$$

§ 76. Сохраненіе живой силы въ движеніи точки. Уравненія (215) могутъ быть представлены такъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots (216)$$

И множимъ 1-ое изъ этихъ уравненій (216) на dx , 2-ое на dy , 3-е на dz и сложимъ. Получимъ:

$$m \left[dx \frac{d^2x}{dt^2} + dy \frac{d^2y}{dt^2} + dz \frac{d^2z}{dt^2} \right] = Xdx + Ydy + Zdz + \\ + \left(\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} dx + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} dy + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) + \left(\lambda_2 \frac{\partial F}{\partial x} dx + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial y} dy + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial z} dz \right) \dots (217)$$

Два послѣдніе члена правой части этого уравненія равны нулю вследствие существованія уравненій связей:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$F(x, y, z) = 0.$$

Лѣвая часть уравненія (217) равна $d \left(\frac{mV^2}{2} \right)$, потому по (89)

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] \dots \dots (218)$$

дифференцируя же (218), получимъ:

$$d \left(\frac{mV^2}{2} \right) = m \left[dx \frac{d^2x}{dt^2} + dy \frac{d^2y}{dt^2} + dz \frac{d^2z}{dt^2} \right] \dots \dots (219)$$

Итакъ (217) принимаетъ замѣчательный видъ:

$$d \left(\frac{mV^2}{2} \right) = Xdx + Ydy + Zdz \dots \dots (220)$$

Въ § 24-омъ мы сказали, что въ большомъ количествѣ случаевъ приращеніе живой силы равно работѣ. Выведа (220) изъ общей теоріи и припоминая, что $Xdx + Ydy + Zdz$, согласно (181), есть элементарная работа, заключаемъ что, согласно (220), *дифференціалъ живой силы равенъ элементарной работѣ*. Это уже похоже на свойство указанное въ § 24-омъ.

Если данныя силы имѣютъ потенціалъ (когда именно онѣ имѣютъ его укажемъ впоследствии въ § 136), то

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (221)$$

Слѣдовательно:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

или $Xdx + Ydy + Zdz = dU \dots \dots \dots (222)$

Сравнивая съ (220), получимъ:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) \dots \dots \dots (223)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{mV^2}{2} = U + C \dots \dots \dots (224)$$

Мы теперь вывели уже изъ общей теоріи законъ (224) сохранения живой силы, который былъ только указанъ въ формулѣ (51).

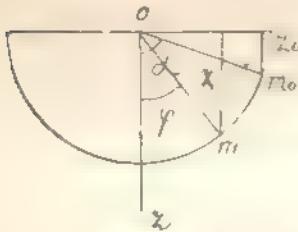
При этомъ необходимо указать на важное значеніе уравненія (222). Оно показываетъ, что дифференціалъ потенціальной функціи равенъ элементарной работѣ.

Все сказанное въ этомъ параграфѣ само по себѣ имѣетъ весьма важное значеніе, какъ мы это въ особенности увидимъ въ § 134, но кромѣ того существованіе потенціальной функціи облегчаетъ значительно рѣшеніе механическихъ вопросовъ. Такъ, напримѣръ, скорость находится весьма просто. Дѣйствительно изъ (224) непосредственно слѣдуетъ:

$$v = \sqrt{\frac{2(U+C)}{m}} \dots \dots \dots (225)$$

Приложимъ теорію потенціальной функціи къ изслѣдованію движенія математическаго маятника.

§ 77. *Математический маятник.* Подъ этимъ названіемъ разумѣютъ отвлеченіе отъ обыкновеннаго физическаго маятника. Именно математическимъ маятникомъ называютъ тяжелую точку m укрѣпленную на концѣ



Фиг. 17.

нерастяжимой и невѣсомой нити, другой конецъ которой укрѣпленъ въ неподвижной точкѣ. Задачу о движеніи математическаго маятника, какъ болѣе простую, рѣшаютъ для того, чтобы потомъ перейти (какъ мы это и сдѣлаемъ въ § 201) къ изученію маятника физическаго.

Отклонимъ маятникъ (фиг. 17) на уголъ α отъ вертикали и предоставимъ ему затѣмъ двигаться подъ влияніемъ тяжести mg (беремъ ось z по вертикали внизъ). Потенціалъ тяжести, какъ мы видѣли въ § 29-омъ равенъ mgz . Итакъ

$$U = mgz \quad (226)$$

Слѣдовательно (224) приметъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mgz + C \quad (227)$$

Изъ начальныхъ данныхъ, получимъ

$$C = -mgz_0,$$

гдѣ z_0 есть координата начального положенія маятника. Слѣдовательно (227) принимаетъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mg(z - z_0)$$

или

$$v^2 = 2g(z - z_0) \quad (228)$$

Вотъ скорость уже и найдена. Мало того, уравненіе (228) дастъ намъ возможность прослѣдить всѣмъ характеръ движенія маятника. Сдѣлаемъ это. Въ начальномъ положеніи, $z = z_0$ и потому по (228) скорость $v = 0$. Подъ дѣйствіемъ тяжести z увеличивается, и скорость по (228) возрастаетъ. Она будетъ наибольшая, когда z получитъ наибольшее значеніе равное длинѣ l маятника, затѣмъ маятникъ будетъ подниматься по дугѣ изъ этого низкаго положенія, и когда z опять уменьшится до z_0 , скорость опять сдѣлается, согласно (228), равно нулю. Въ этомъ положеніи, при окончаніи полукоселебанія, маятникъ будетъ находиться въ тѣхъ же условіяхъ какъ и въ началѣ но по другую сторону вертикали, проходящей чрезъ точку подвѣса. Онъ произведетъ обратное движеніе и долетѣтъ до начальнаго положенія, откуда пойдетъ опять по прежнему и т. д., движеніе его будетъ колебаніе по дугѣ съкружности, описанной изъ точки подвѣса радіусомъ l .

Послѣдуемъ одно такое колебаніе. Обозначимъ чрезъ φ уголъ, составляемый маятникомъ съ осью: въ концѣ времени t послѣ выхода изъ начального положенія. Примемъ начальное положеніе m , за начало дугъ описываемыхъ точкой m . Изъ условий имѣемъ:

$$\begin{aligned} l &= l_0 (\alpha - \varphi) \\ l \frac{d\varphi}{dt} &= l_0 \frac{d\varphi}{dt} \\ z &= l \cdot \cos \varphi \\ z_0 &= l \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Вставляя эти величины въ (228), получимъ:

$$l \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 2gl (\cos \varphi - \cos \alpha) \quad . \quad . \quad (229)$$

Во время перваго полукосебанія φ уменьшается, поэтому $\frac{d\varphi}{dt}$ отрицательно; такъ что изъ (229) получимъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{2 (\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Отсюда

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{2 (\cos \varphi - \cos \alpha)}} \quad . \quad . \quad (230)$$

Интегрированіе этого уравненія, и слѣдовательно точное рѣшеніе задачи, приведетъ къ эллиптическимъ функциямъ. Примемъ ее приближительно, рассматривая только малыя колебанія, при которыхъ α и φ достаточно малы (напримѣръ $\alpha = 1^\circ$).

Разложивъ $\cos \varphi$ и $\cos \alpha$ въ восходящимъ степенямъ переменныхъ φ и α и отбавивъ члены шестого и высшихъ порядковъ, получимъ:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24}$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}$$

Слѣдовательно:

$$\frac{1}{2 (\cos \varphi - \cos \alpha)} = \frac{1}{2 (\alpha^2 - \varphi^2)} \left(1 - \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{12} \right)^{-1}$$

Разложивъ $\left(1 - \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{12} \right)^{-1}$ по Слову Ньютона и отбавивъ члены 4-го и высшихъ порядковъ, получимъ:

$$\frac{1}{2 (\cos \varphi - \cos \alpha)} = (\alpha^2 - \varphi^2)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{24} \right).$$

Подставивъ въ (230), получимъ:

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha^2 + \varphi^2}{24} \right)}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} d\varphi$$

или

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \cdot \left[\frac{dz}{z - \alpha} + \right] \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{z^2 - \alpha^2}{z^2} \cdot \alpha \varphi$$

Интегрируя, получимъ:

$$t + const = \left[\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \arccos \left(\frac{z}{\alpha} \right) + \frac{1}{48} \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\varphi \left(1 - \frac{z}{\alpha} \right) - \alpha^2 \cdot \arccos \left(\frac{\varphi}{\alpha} \right) \right] \right].$$

При $t = 0$, $\varphi = \alpha$, следовательно $const = 0$. Поэтому

$$t = \frac{1}{48} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \varphi \left(1 - \frac{z}{\alpha} \right) - \frac{1}{g} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{12}\right) \arccos \left(\frac{z}{\alpha} \right) \quad . \quad (231)$$

Вотъ уравнение движения маятника во время 1-го колебания. Оно тѣмъ точнѣе выражаетъ истину, чѣмъ меньше было α .

Опредѣлимъ продолжительность T цѣлаго колебания и продолжительность T' полуколебания.

Для опредѣленія T нужно положить въ (231)

$$t = T; \quad \varphi = -\alpha.$$

Получимъ:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (232)$$

Для опредѣленія T' нужно положить:

$$t = T'; \quad \varphi = 0.$$

Получимъ:

$$T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

Если бы мы пренебрегли квадратами α , то получили бы известныя въ элементарной физикѣ формулы:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (234)$$

$$T' = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (235)$$

Данныя здѣсь формулы (232) и (233) точнѣе формулъ (234) и (235).

ОТДѢЛЪ II.

Равновѣсіе неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Сложеніе силъ и паръ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

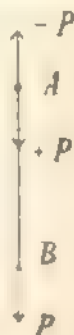
§ 78. **Неизмѣняемая система.** Неизмѣняемою системою называется такая система точекъ, въ которой взаимныя разстоянія между точками не измѣняются. Такая система можетъ быть названа абсолютно твердою.

Встрѣчающіяся въ природѣ тѣла, даже такіа твердыя какъ сталь, алмазъ и проч., строго говоря, не представляютъ собою системъ неизмѣняемыхъ, потому что взаимныя разстоянія между ихъ частицами измѣняются, увеличиваются при растягиваніи, и уменьшаются при упругой деформации, а также и вслѣдствіе существующихъ во въ какомъ тѣлѣ молекулярныхъ движеній. Какъ и всегда мы сначала упрощаемъ задачу, не принимая въ соображеніе всѣхъ подробностей, рассужденіе же объ этихъ подробностяхъ вводимъ послѣ рѣшенія вопроса въ общемъ видѣ. Неизмѣняемая система и представляетъ собою отвлеченіе отъ понятія о физическомъ твердомъ тѣлѣ.

§ 79. **Перенесеніе точки приложенія силы.** Ученіе о равновѣсіи неизмѣняемой системы основано на слѣдующемъ положеніи: *два равныя и противоположныя силы, приложенныя къ точкамъ A и B неизмѣняемой системы и направленные по прямой AB , взаимно уничтожаются.*

Положеніе это приводитъ къ слѣдующему важному заключенію: *силу P , приложенную къ какой-нибудь точкѣ A (фиг. 18)*

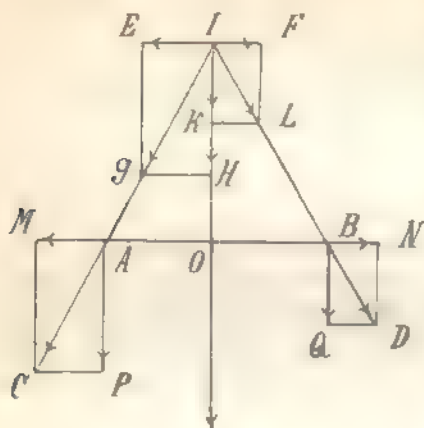
неизмѣняемой системы, можно перенести, не измѣняя ея направленія, на любую точку B системы, лежащую въ направленіи этой силы. Въ самомъ дѣлѣ, прилагая къ точкамъ A и B взаимно уничтожающіяся силы ($-P$) и $(+P)$ и замѣчая, что оказавшіяся приложенными въ точкѣ A силы взаимно уничтожаются, убѣждаемся, что вмѣсто данной силы приложенной въ A осталась равная ей сила, приложенная въ точкѣ B , что и требовалось доказать.



Фиг. 18.

§ 80. **Сложеніе такихъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, силъ, продолженія которыхъ взаимно пересѣкаются въ одной точкѣ.** Если на разныя точки неизмѣняемой системы дѣйствуютъ силы, сходящіяся въ одной точкѣ O , то всѣ онѣ могутъ быть перенесены въ одну точку и послѣдовательнымъ примѣненіемъ правила параллелограмма могутъ быть замѣнены одною равнодѣйствующею.

§ 81. Сложение двухъ параллельныхъ и направленныхъ въ одну сторону силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему. Положимъ (фиг. 19) что на точку A неизмѣняемой системы дѣйствуетъ сила P , а на точку B



Фиг. 19

той же системы дѣйствуетъ сила Q параллельная силѣ P и направленная въ ту же сторону. Покажемъ, что такіе двѣ силы тоже приводятся къ одной равнодѣйствующей.

Положимъ, что сила P представляется векторомъ AP , сила Q — векторомъ BQ . Приложимъ къ A и B по прямой AB двѣ равныя и противоположныя силы AM и BN ; онѣ, какъ взаимно уничтожающіяся, не измѣняютъ равновѣсія *). Силы AP и AM могутъ быть замѣнены равнодѣйствующею AC . Силы BQ и BN могутъ быть замѣнены равнодѣйствующею BD . Следовательно данныя

силы P и Q можно замѣнить силами AC и BD , сходящимися въ какой-нибудь точкѣ I и приводящимися поэтому къ одной равнодѣйствующей.

Опредѣлимъ величину и направленіе этой равнодѣйствующей.

По перенесеніи въ точку I силъ AC и BD представятся, положимъ, векторами IG и IL . Проведемъ IO параллельно заданнымъ силамъ и прямую EIF параллельно прямой AB . Сила IG разлагается на IH и IE (сила IL разлагается на IK и IF). Изъ равенства параллелограммовъ и изъ условія $AM = BN$ слѣдуетъ:

$$IE = IF.$$

Эти силы, согласно § 79, взаимно уничтожаются. Кроме того имѣемъ

$$IH = AP = P$$

$$IK = BQ = Q.$$

Равнодѣйствующая оставшихся силъ IH и IK имѣетъ, одно съ ними, направленіе и равна ихъ суммѣ. Итакъ *равнодѣйствующая силамъ параллельнымъ и въ одну сторону направленнымъ силамъ имѣетъ силу съ ними направленіе и равна ихъ суммѣ.*

На основаніи § 79 можно перевести точку приложенія этой равнодѣйствующей въ точку пересѣченія O прямыхъ IH и AB .

Опредѣлимъ положеніе точки O .

*) Во дальнѣйшемъ мы часто будемъ пользоваться этимъ приемомъ введенія взаимно уничтожающихся силъ.

Из подобия треугольников IGH и IAO слѣдуетъ

$$\frac{IH}{GH} = \frac{IO}{AO}.$$

Из подобия треугольников IKL и IOB слѣдуетъ

$$\frac{IK}{KL} = \frac{IO}{BO}.$$

Но $KL = GH$. Слѣдовательно:

$$\frac{IH}{IK} = \frac{BO}{AO}.$$

или

$$\frac{P}{Q} = \frac{BO}{AO} \dots \dots \dots (236)$$

(236) выражаетъ, что, точка приложения равнодействующей двухъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, представляеть силу, лежащую на прямой, соединяющей точки A и B приложения этихъ силъ, на отъѣсѣ отъ точки A и B въ разстояніяхъ, обратно-пропорциональныхъ силамъ.

§ 82. Центръ параллельныхъ силъ Положимъ, что на неизмѣняемую систему дѣйствуетъ нѣсколько взаимно-параллельныхъ одинаково направленныхъ силъ $P, P, P \dots$ (фиг. 20). Будемъ складывать эти силы по правилу предыдущаго параграфа постепенно, пользуясь тою формулою Аналитической Геометрии, по которой саредвляются координаты точки, дѣлящей разстояніе между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) въ отношеніи m къ n . Координаты точки C приложенія равнодѣйствующей силъ P_1 и P_2 будутъ:

$$x_c = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2} \dots \dots \dots (237)$$

$$y_c = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2} \dots \dots \dots (238)$$

$$z_c = \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2} \dots \dots \dots (239)$$

Опредѣлимъ теперь координаты точки D приложенія равнодѣйствующей силъ P_1 и равнодѣйствующей приложенной въ C . Получимъ

$$\left. \begin{aligned} x_D &= \frac{(P_1 + P_2) x_c + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} \\ y_D &= \frac{(P_1 + P_2) y_c + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3} \\ z_D &= \frac{(P_1 + P_2) z_c + P_3 z_3}{P_1 + P_2 + P_3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (240)$$

Примѣромъ центра параллельныхъ силъ можетъ служить центръ тяжести. Тяжесть дѣйствуетъ на всѣ точки тѣла, размѣры котораго ничтожны съ размѣрами земного шара, но прямыми взаимно параллельными (отвѣсными); точка приложения всѣхъ этихъ силъ называется *центромъ тяжести*.

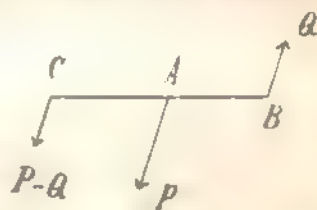
§ 83. Сложение двухъ силъ взаимно-параллельныхъ, но направленныхъ въ противоположныя стороны. Возьмемъ двѣ такія силы P и Q (фиг. 21). Выберемъ на прямой AB , соединяющей ихъ точки приложения A и B такую точку C , чтобы:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P+Q}$$

и чтобы точка A приложения большей силы P лежала между B и C .

Согласно § 81-му можно разложить силу P на силу $P-Q$ приложенную въ точкѣ C и на силу $(-Q)$, приложенную въ точкѣ B .

Силы $(+Q)$ и $(-Q)$, приложенныя въ B взаимно уничтожатся и останется одна сила $P-Q$ приложенная въ C , которая замѣнила собою совокупность данныхъ силъ P и Q следовательно равнодѣйствующая имъ, взаимно параллельныхъ, но противоположно направленныхъ силъ P и Q .



Фиг. 21

параллельна даннымъ силамъ, направлена въ сторону большей изъ данныхъ силъ, и точка приложения ея находится на внешней части отрезка AB определяемо точками приложения данныхъ силъ, съ стороны большей силы, причемъ расстояние ея равно разности данныхъ силъ. Если A есть точка приложения большей изъ данныхъ силъ, C точка приложения равнодѣйствующей, то

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Q}{P+Q} \quad (243)$$

§ 84. Пара силъ. Въ случаѣ силъ параллельныхъ, но противоположно направленныхъ, съ уменьшеніемъ большей силы P , равнодѣйствующая $(P-Q)$ уменьшается, расстояние же AC , какъ видно изъ (243), увеличивается. Наконецъ, при

$$P = Q$$

расстояние AC сдѣлается безконечно большимъ, равнодѣйствующая же $(P-Q)$ обратится въ нуль. Следовательно двѣ равныя и параллельныя, но противоположныя, силы приводятся къ силѣ равной нулю, дѣйствующей на безконечно большомъ разстояніи. О такомъ дѣйствіи мы никакого понятія не имѣемъ. Приведеніе такой совокупности силъ къ такой непонятной равнодѣйствующей никакой пользы не приноситъ. Поэтому знаме-

нитый французский математик Poinsot предложил рассматривать двѣ равныя, параллельныя, но противоположныя силы, какъ особый элементъ, равновѣсія названный имъ *парою силъ* и дать теорію пары, значительно упрощающую общую теорію равновѣсія неизмѣняемой системы.

На основаніи сказаннаго въ § 79-омъ можно всегда перенести силы, составляющія пару по ихъ направленію такъ, чтобы прямая AB (фиг. 22), соединяющая ихъ точки приложенія, была къ нимъ перпендикулярна. Такая прямая AB называется *плечомъ пары*.

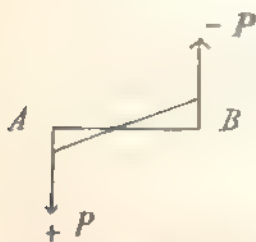
Произведеніе

$$P \cdot AB \dots \dots \dots (244)$$

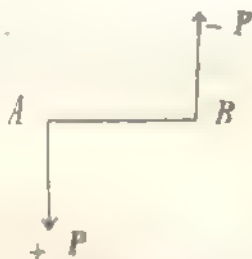
одной изъ силъ, составляющихъ пару, на плечъ называется *моментомъ пары*.

Прямая, проведенная чрезъ середину плеча перпендикулярно къ плоскости пары, называется *осью пары*.

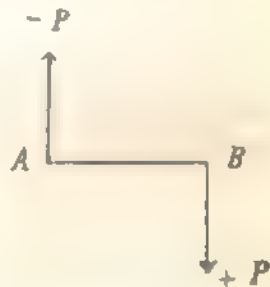
Моментъ пары обыкновенно представляютъ себѣ геометрически слѣдующимъ образомъ: отбавываютъ равную ему длину по оси пары въ та-



Фиг. 22.



Фиг. 23.



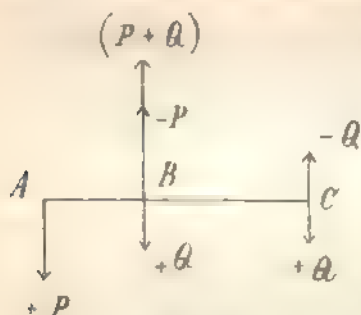
Фиг. 24.

кую сторону, чтобы наблюдателю, стоящему на плоскости пары съ туловищемъ направленнымъ по моменту пара представлялась стремящаяся повернуть систему по направленію движенія стрѣлки часовъ. Такимъ образомъ для пары (фиг. 23) моментъ надо отложить подъ плоскостью чертежа для пары же (фиг. 24) моментъ надо отложить надъ плоскостью чертежа.

§ 85. *Перенесеніе пары.* Докажемъ, что пару можно перенести, не измѣняя ея дѣйствія, какъ угодно, лишь бы не измѣнилось направленіе ея оси.

1) *Всякая пара можетъ быть перенесена съ плоскости, параллельную ей плоскости.* Возьмемъ прямую CD (фиг. 25) равную и параллельную плечу AB данной пары. Дѣйствіе данной пары не измѣнится, если мы приложимъ въ точкѣ C равныя и противоположныя силы $(+P)$ и $(-P)$ и въ точкѣ D равныя и противоположныя силы $(+P)$ и $(-P)$.

Возьмемъ пару $P, -P$ приложенную къ плечу AB (фиг. 27); на продолженіи плеча AB возьмемъ точку C . Приложимъ къ B двѣ равныя и противоположныя силы Q и $(-Q)$ перпендикулярныя къ плечу. Приложимъ тоже къ C двѣ равныя и противоположныя силы Q и $(-Q)$ перпендикулярныя къ плечу. При этомъ выберемъ Q такъ, чтобы



Фиг. 27.

$$Q \cdot BC = P \cdot AB \dots (245)$$

Силы P и Q , приложенныя къ A и C уничтожаются къ 1-му, силами $(-P)$ и $(-Q)$, приложенными къ B . Остается пара $(Q, -Q)$ съ плечомъ BC . Данная пара $(P, -P)$ преобразовалась въ пару $(Q, -Q)$ съ другимъ плечомъ, но съ моментомъ $Q \cdot BC$, который, согласно (245),

равенъ моменту $P \cdot AB$ данной пары. Что и требовалось доказать.

§ 87. **Общее заключеніе о парахъ.** Итакъ пару можно всячески переносить и преобраз. вывать безъ измѣненія ея дѣйствія, *лишь бы моментъ ея сохранялъ свою величину и направленіе*. Следовательно величину и направленіемъ момента пара вполне характеризуется.

§ 88. **Сложеніе паръ, лежащихъ въ плоскостяхъ параллельныхъ.** Положимъ, что намъ дана пара $(P, -P)$ съ плечомъ p , и въ плоскости параллельной къ этой парѣ дана другая пара $(Q, -Q)$ съ плечомъ q . Вторую пару перенесемъ въ плоскость первой пары. Приведемъ обѣ пары, по сказанному въ § 86, къ плечамъ равнымъ единицѣ длины. Получимъ такія пары: $(Pr, -Pr)$ и $(Qq, -Qq)$, моменты которыхъ Pr и Qq равны моментамъ данныхъ паръ.

Перенѣсимъ вторую пару такъ, чтобы плечо ея совпало съ плечемъ первой пары и чтобы точка приложенія силы $(+Pr)$ совпала съ точкою приложенія силы $(+Qq)$. Если направленія этихъ силъ совпадаютъ, то получимъ равнодѣйствующую пару.

$$[(Pr + Qq), -(Pr + Qq)] \dots (246)$$

Если направленія силъ $(+Pr)$ и $(+Qq)$ противоположны, то получимъ равнодѣйствующую пару

$$[(Pr - Qq), -(Pr - Qq)] \dots (247)$$

По построенію плечи паръ (246) и (247) равны единицѣ. Следовательно моментъ пары (246) равенъ

$$Pr + Qq.$$

Моментъ пары (247) равенъ

$$Pr - Qq.$$

Этотъ выводъ можно выразить такими словами: *Моментъ равнодѣйствующей пары равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ, если постоянны лежатъ въ плоскостяхъ взаимно параллельныхъ.*

§ 89. Сложеніе паръ, лежащихъ въ перестѣнающихся плоскостяхъ. Приведемъ данныя пары къ плечамъ равнымъ единицѣ. Получимъ пары.

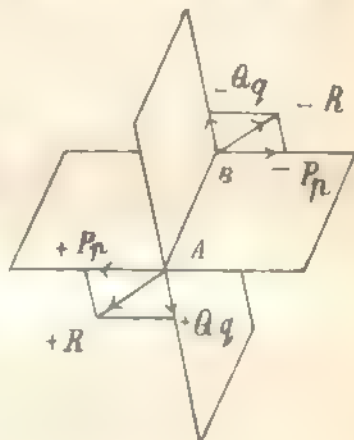
$$(Pr, - Pr)$$

$$(Qq, - Qq).$$

Перемѣстимъ ихъ такъ, чтобы у нихъ было общее плечо на прямой пересѣченія ихъ плоскостей (фиг. 28). На точку *A* дѣйствуютъ двѣ силы, складывающіяся въ одну силу *R*. На точку *B* дѣйствуютъ двѣ силы, складывающіяся въ одну силу ($-R$). Вмѣсто данныхъ паръ мы получили одну равнодѣйствующую пару

$$(R, - R)$$

съ моментомъ *R*.



Фиг. 28.

Еслибы мы построили моменты паръ

$(Pr, - Pr)$ и $(Qq, - Qq)$, то получили бы параллелограммъ, у котораго стороны суть моменты *Pr* и *Qq*; диагональ же равна *R*.

Этотъ выводъ можно выразить слѣдующими словами: *моментъ равнодѣйствующей пары равенъ геометрической суммѣ моментовъ составляющихъ паръ, если постоянны лежатъ въ перестѣнающихся плоскостяхъ.*

ГЛАВА II.

Приведеніе силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло, къ простѣйшимъ системамъ силъ.

§ 90. Общее замѣчаніе. Силы, дѣйствующія на точку, всегда приводятся къ одной равнодѣйствующей.

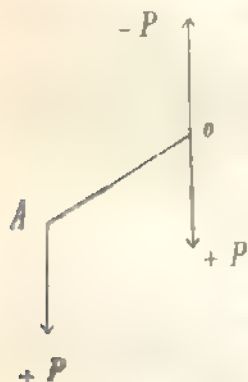
Силы, дѣйствующія на различныя точки неизмѣняемой системы, не всегда приводятся къ одной равнодѣйствующей. Въ послѣдующихъ параграфахъ мы покажемъ, что:

- 1, силы, дѣйствующія на неизмѣняемую систему, всегда могутъ быть приведены къ двумъ непараллельнымъ и непересѣкающимся силамъ;
- 2, силы, дѣйствующія на неизмѣняемую систему, всегда могутъ быть

приведены къ совокупности равнодѣствующей силы и равнодѣствующей пары;

3) упомянутыя подъ № 2 равнодѣствующая сила и пара могутъ быть располагаемы одна относительно другой безконечнымъ числомъ способовъ, но всегда можно расположить ихъ и такъ, что равнодѣствующая сила и моментъ равнодѣствующей пары будутъ лежать на одной прямой и приводить ~~опредѣленны~~ *опредѣленны* ~~и~~ *называется* *динамомъ*.

§ 91 Перенесеніе силы. Докажемъ прежде всего слѣдующую весьма важную теорему *Точку приложения данной силы можно перенести, безъ изменения ея эффекта на неизмѣняемую систему, въ любую точку пространства, если при этомъ добавитъ къ ней некоторую пару.*



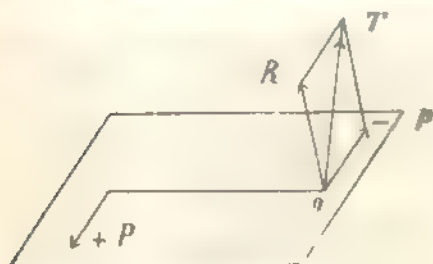
Фиг. 29

Положимъ, что на неизмѣняемую систему дѣйствуетъ сила P (фиг. 29), приложенная къ точкѣ A , и требуется перенести точку приложения этой силы въ точку O .

Дѣйствіе силы не измѣнится, если приложимъ въ O двѣ равныя P и параллельныя ей взаимно противоположныя силы. Полученную совокупность силъ можемъ разсматривать какъ силу P приложенную въ O и пару $(P, -P)$.

Данная сила P оказалась перенесенною въ O , но при этомъ пришлось добавитъ еще пару $(P, -P)$.

§ 92 Приведеніе къ одной силѣ и одной парѣ Положимъ, что намъ дано какое угодно число силъ P, P', P'', P''', \dots приложенныхъ, соответственно, въ точки A, B, C, D, \dots неизмѣняемой системы. Перенесемъ, по теоремѣ предыдущаго параграфа, всѣ эти силы въ какую-либо точку O . Согласно съ упомянутою теоремою при этомъ придется добавитъ нѣсколько паръ. Сложивъ всѣ силы, перенесенныя въ точку O , получимъ равнодѣствующую силу R . Сложивъ всѣ пары, получимъ равнодѣствующую пару $(P, -P)$. Точка O , въ которую переносятся всѣ данныя силы называется *центромъ приведенія*.



Фиг. 30.

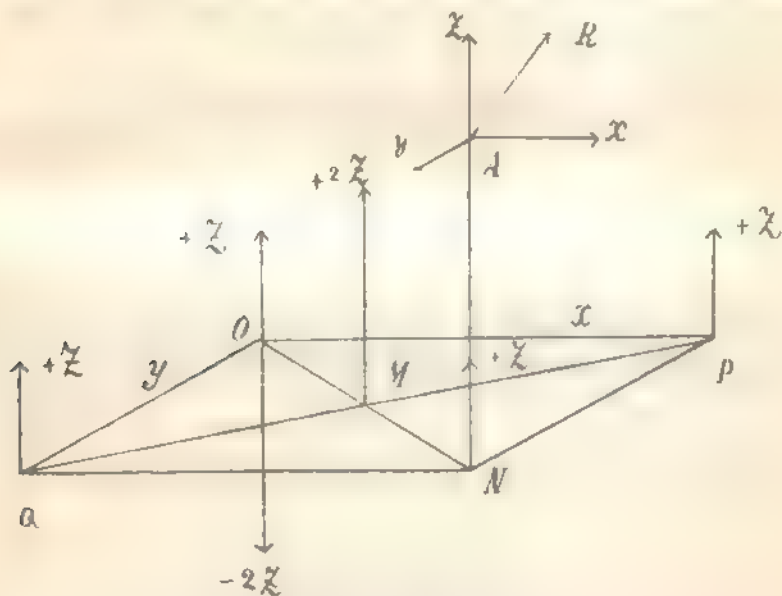
Итакъ: всякую совокупность силъ дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему можно всегда привести къ совокупности равнодѣствующихъ силъ и пары.

§ 93 Приведеніе къ двумъ параллельнымъ и непересекающимся силамъ. Положимъ, что у насъ (фиг. 30) исполнено уже приведеніе къ одной силѣ R и одной парѣ $(P, -P)$.

Сложим приложенныя въ точкѣ O силы R и $(-P)$, въ равнодѣйствующую T . Остались двѣ непараллельныя и непересекающіяся силы T и $(+P)$.

§ 94. Аналитическое выраженіе приведенія къ одной парѣ и одной силѣ. Представимъ себѣ, что на вѣковую точку A неизмѣняемой системы (фиг. 31) дѣйствуетъ сила R . Выберемъ какия-нибудь оси Декартовыхъ координатъ. Проведя чрезъ точку A прямыя, параллельныя этимъ осямъ, проложимъ на нихъ силу R . Получимъ три слагающихъ X , Y , Z .

Займемся пока одною слагающею Z . Перенесемъ Z по ея направленію такъ, чтобы точка приложенія N оказалась въ плоскости (x, y)



Фиг. 31.

Опустивъ изъ N перпендикуляры MP , NQ на оси x -овъ и y -овъ и обозначая координаты точки A чрезъ (x, y, z) , получимъ.

$$OP = x$$

$$OQ = y.$$

Приложимъ въ началѣ координатъ O силы Z и $(-Z)$. Изъ нихъ силу Z оставимъ, а полученную теперь пару $(Z, -Z)$ съ плечомъ ON преобразуемъ къ плечу вдвое меньшему. Получимъ пару

$$(2Z, -2Z)$$

съ плечомъ OM . Силу $2Z$ приложенную къ M разложимъ на силы Z и Z , приложенныя въ P и Q . Всего теперь осталось, остальная сила

$$Z = R \cos(R, z)$$

приложенная въ O и двѣ пары:

$(Z, -Z)$ съ плечомъ x и моментомъ $(-Zx)$,

$(Z, -Z)$ съ плечомъ y и моментомъ $(+Zy)$.

Поступая точно такъ же съ приложенными въ A силами X и Y получимъ:

силы: $R \cos (R, x); R \cos (R, y), R \cos (R, z)$

приложенныя въ O ;

пары съ моментами: $(Xz); (-Zx); (Yx); (-Xy); (Zy); (-Yz)$.

Складывая, попарно, тѣ изъ этихъ паръ, моменты которыхъ взаимно параллельны, получимъ пары съ моментами:

$$Zy - Yz$$

$$Xz - Zx$$

$$Yx - Xy.$$

Силы приложенныя въ O дадутъ приложенную въ O равнодѣствующую силѣ R .

Поступая такъ съ силами приложенными не только въ A , но и въ другихъ точкахъ неизмѣняемой системы, видимъ, что всѣ онѣ приводятся къ одной равнодѣствующей, проложенія которой суть:

$$\Sigma X; \Sigma Y; \Sigma Z \dots \dots \dots (248)$$

и къ одной парѣ; проложенія L, M, N моментовъ этой пары суть:

$$\begin{array}{l|l} \Sigma (Zy - Yz) = L & \\ \Sigma (Xz - Zx) = M & \dots \dots \dots (249) \\ \Sigma (Yx - Xy) = N, & \end{array}$$

§ 95. Центръ приведенія. Мы уже сказали въ § 92-омъ, что точка проложенія равнодѣствующей силы называется *центромъ* приведенія. При выводѣ формулъ (248) и (249) мы принимали за центръ приведенія начало координатъ. Изъ способа, которымъ мы выводили эти формулы, видно, что какую бы точку мы ни принимали за центръ приведенія (и за начало координатъ) равнодѣствующая сила P получится той же величины и того же направленія. Но для каждой точки приведенія получится своя особая равнодѣствующая пара.

Приведеніе данныхъ силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, можетъ быть, слѣдовательно, исполнено безконечнымъ числомъ способовъ. Уголъ, составляемый равнодѣствующею силою P и моментомъ равнодѣствующей пары H , определяется формулою:

$$\begin{aligned} \cos (P, H) = \cos (P, x) \cdot \cos (H, x) + (\cos (P, y) \cdot \cos (H, y) + \\ + \cos (P, z) \cdot \cos (H, z) \dots \dots \dots (250) \end{aligned}$$

принять изъ (248) имѣемъ:

$$\begin{aligned}\cos (P, x) &= \frac{\Sigma X}{P} \\ \cos (P, y) &= \frac{\Sigma Y}{P} \\ \cos (P, z) &= \frac{\Sigma Z}{P}\end{aligned} \quad (251)$$

изъ (249) имѣемъ:

$$\begin{aligned}\cos (H, x) &= \frac{L}{H} = \frac{\Sigma Z y - Y z}{H} \\ \cos (H, y) &= \frac{M}{H} = \frac{\Sigma (X z - Z x)}{H} \\ \cos (H, z) &= \frac{N}{H} = \frac{\Sigma (Y x - X y)}{H}\end{aligned} \quad (252)$$

Для различныхъ центровъ приведенія будутъ получаться различные углы между P и H .

§ 96. Теорема. каковъ бы ни былъ центръ приведенія, проэція момента M равнодѣйствующей пары на направленье равнодѣйствующей силы P остается одною и тою же для всѣхъ точекъ приведенія.

Доказательство. Пусть будутъ P и M равнодѣйствующая сила и моментъ равнодѣйствующей пары (фиг. 32). Перенесемъ центръ приведенія изъ O въ O' . Для перенесения силы P нужно (согласно § 91) прибавить еще пару $(P, -P)$ съ некоторымъ моментомъ M'' , такъ что моментъ M равнодѣйствующей пары для центра приведенія въ O' будетъ:

$$M' = M + M''$$

Черточки надъ буквами обозначаютъ, что берется (согласно § 89) *геометрическая сумма*. Но M'' перпендикуляренъ къ P , такъ какъ P есть одна изъ силъ добавочной пары, имѣющей моментъ M'' . Следовательно, проецируя моменты на направленье P , получимъ:

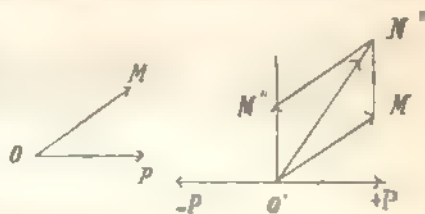
$$\begin{aligned}M \cos (M, P) &= M \cos (M, P) + M'' \cos (M'', P) \\ &= M \cos (M, P) + M'' \cos (90^\circ).\end{aligned}$$

Слѣдовательно:

$$M' \cos (M', P) = M \cos (M, P),$$

что и требовалось доказать.

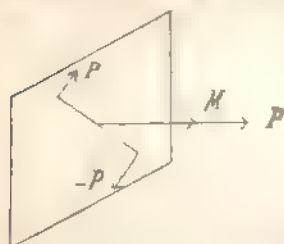
§ 97. Динама. Изъ всѣхъ приведеній совокупности силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, самое замѣчательное то, когда моментъ M



Фиг. 32.

равнодействующей пары лежить на одной прямой съ равнодействующею силою P . Такая совокупность силы P и пары, имѣющей моментъ M направленный по силѣ P называется *динамою* (фиг. 33).

Въ динамѣ пара M стремится повернуть неизмѣняемую систему около силы P , а сила P стремится подвинуть тѣло по своему направлению: динама представляетъ собою винтовое усилие. Если динама состоитъ изъ пары имѣющей моментъ M и силы P , направленной по этому моменту, то величина:

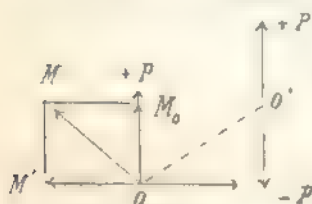


Фиг. 33.

$$\frac{M^0}{P} = r \dots \dots (253)$$

называется *параметромъ* динамы. Прямая, по которой дѣйствуетъ P , называется *асириальною осью* или *осью динамы*.

§ 98. Теорема Всякая система силъ, дѣйствующая на неизмѣняемую систему, можетъ быть приведена къ динамѣ. Положимъ, что система силъ приведена къ совокупности силы P и пары съ моментомъ M при центрѣ приведенія O (фиг. 34). Разложимъ моментъ M на два момента изъ коихъ одинъ M_0 направленъ по P , другой M перпендикуляренъ къ P .



Фиг. 34.

Выберемъ другой центръ приведенія O' слѣдующимъ образомъ: возставимъ изъ O перпендикуляръ къ плоскости POM и отложимъ на немъ

$$OO' = \frac{M'}{P}$$

вълѣво отъ силы P , если смотреть съ конца момента M' .

Приложимъ въ O' двѣ силы равныя и параллельныя P , но взаимно противоположныя $(+P)$ и $(-P)$. Теперь имѣемъ силу P приложенную въ O' и пару $(P, -P)$ съ плечомъ $OO' = \frac{M'}{P}$. Слѣдовательно моментъ этой пары будетъ $(-M')$, такъ какъ она вращаетъ по стрѣлкѣ часовъ, если на нее смотреть не съ конца M , а съ конца $(-M')$.

Моменты $(+M)$ и $(-M)$ уничтожатся и останутся сила P , приложенная въ O и моментъ M , параллельный ей. Остается его перенести параллельно самому себѣ и получимъ *динаму* при центрѣ приведенія O' .

§ 99. Частные случаи приведенія силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему.

1) Если:

$$M_0 = 0,$$

то изъ (253) видно, что параметръ r динамы равенъ нулю. Изъ чер-

жега (фиг. 44) видно, что въ общемъ случаѣ:

$$M_0 = M \cdot \cos(M, P).$$

Въ настоящемъ случаѣ слѣдовательно

$$M \cdot \cos(M, P) = 0.$$

Поскольку, следовательно, въ данномъ случаѣ, действующая на данную систему силъ приводитъ къ одной силѣ, то $M \cdot \cos(M, P) = 0$. Такому систему можно рассматривать какъ динаму, параметръ которой равенъ нулю.

II) Если:

$$P = 0,$$

то изъ (253) вытекаетъ

$$p = \infty.$$

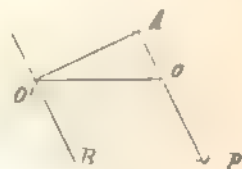
Поскольку величина силъ, действующихъ на данную систему, эквивалентная одной парѣ, можетъ быть рассматриваема какъ динама, параметръ которой равенъ бесконечности *).

§ 100. Статическіе моменты Въ статикѣ (теоріи равновѣсія) неизменяемой системы трехъ силъ, у которыхъ точки приложения *статическіе моменты* относительно O и статическій моментъ относительно точки. Порядокъ величинъ равенъ числу въ слѣдующихъ параграфахъ, гдѣ будутъ выведена также ихъ тѣсная связь съ понятіемъ о парѣ.

§ 101. Статическій моментъ относительно точки. Статическимъ моментомъ силы P относительно точки O (фиг. 35) называется площадь параллелограмма $OOPB$, построеннаго на силѣ P и на прямой OA соединяющей точку приложения силы P съ данной точкою O .

Не трудно видѣть, что статическій моментъ относительно точки равенъ моменту той пары, которая потребна для перенесения точки приложения силы P изъ O въ O' . Действительно, моментъ этой пары равенъ

$$P \cdot OA,$$



Фиг. 35.

гдѣ OA есть перпендикуляръ, опущенный изъ O на направление силы P . Точно также и площадь упомянутого параллелограмма равна $P \cdot OA$.

Поэтому можно еще дать такое опредѣленіе: *статическимъ моментомъ силы P относительно точки O называется произведение $P \cdot OA$ силы P на перпендикуляръ, опущенный изъ точки O на направление силы P* .

§ 102. Статическій моментъ относительно оси. Статическимъ моментомъ силы относительно оси называется произведение *составляющей* изъ

* Теорія динамы и лучшаго широкое развитіе благодаря, въ особенности, работамъ Plücker'a и Ball'a.

Plücker, Neue Geometrie des Raumes.

Ball, Theory of screws.

проекция этой силы на плоскость, перпендикулярную къ оси и въ кратчайшаго разстоянія между силой и осью. Подъ осью здѣсь разумеется какая-либо данная прямая.

Изъ этого опредѣленія вытекаетъ, что статическій моментъ силы относительно оси равенъ статическому моменту проекции этой силы на плоскость перпендикулярную къ оси относительно точки пересѣченія оси съ ея кратчайшимъ разстояніемъ отъ силы.

Слѣдовательно, статическій моментъ силы относительно оси равенъ моменту пары, упомянутой въ предыдущемъ параграфѣ.

Слѣдовательно (см. § 88), статические моменты относительно данной оси складываются въ такой равнодѣйствующій статическій моментъ относительно той же оси, который равенъ алгебраической суммѣ составляющихъ статическихъ моментовъ.

§ 103. Статические моменты относительно осей координатъ совокупности силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему. Въ сложении силъ, разобранномъ въ § 94-омъ, Z_H есть статическій моментъ силы Z относительно оси $иксовъ$, — Y_Z есть статическій моментъ силы Y относительно оси $иксовъ$, и такъ далѣе. Слѣдовательно:

$$\begin{aligned} L &= \sum (Z_H - Y_Z) && \left. \begin{aligned} &\text{статическій моментъ данныхъ силъ} \\ &\text{относительно оси } \textit{иксовъ}, \\ &= \text{проложеніе на ось } \textit{иксовъ} \text{ момента} \\ &\text{равнодѣйствующей пары,} \end{aligned} \right\} \\ M &= \sum (X_Z - Y_H) && \left. \begin{aligned} &\text{статическій моментъ данныхъ силъ} \\ &\text{относительно оси } \textit{игрековъ}, \\ &= \text{проложеніе на ось } \textit{игрековъ} \text{ мо-} \\ &\text{мента равнодѣйствующей пары,} \end{aligned} \right\} \\ N &= \sum (Y_X - X_H) && \left. \begin{aligned} &\text{статическій моментъ данныхъ силъ} \\ &\text{относительно оси } \textit{зедовъ}, \\ &= \text{проложеніе на ось } \textit{зедовъ} \text{ момента} \\ &\text{равнодѣйствующей пары.} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (254)$$

Итакъ, статические моменты совокупности данныхъ силъ относительно осей координатъ соответственно равны проложеньямъ на оси координатъ момента равнодѣйствующей пары и тѣ и другія опредѣляются формулами (254).

§ 104. Удобства, представляемая понятіемъ о статическомъ моментѣ. Статические моменты весьма упрощаютъ дѣло во многихъ случаяхъ при изслѣдованіи вращающихся силъ.

Напримѣръ, вращающая сила p , приложенная къ ободу колеса радіуса R , уравновѣшивается силой P приложенною на разстояніи r отъ оси колеса, если

$$Rp = rP.$$

Проще сказать, что для поворота данного колеса требуется моментъ M , чѣмъ объяснять, что для его поворота требуется такая-то сила, прило-

женная на такомъ-то разстояніи отъ оси. Если же данъ моментъ M требуемый для поворота колеса, то соотношение между силою (параллельною плоскости колеса) и разстояніемъ ея отъ оси представляется формулою

$$M = P \cdot r \dots \dots \dots (255)$$

ГЛАВА III.

Условія равновѣсія неизмѣняемой системы.

§ 105. Условіе равновѣсія свободной неизмѣняемой системы. Если движеніе неизмѣняемой системы ничѣмъ не стѣсняется, то она можетъ быть въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если моментъ равнодѣйствующей пары и равнодѣйствующая сила, а слѣдовательно и проложенія ихъ на оси координатъ равны нулю. Поэтому условія равновѣсія свободной неизмѣняемой системы таковы:

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma Z &= 0 \\ \left. \begin{aligned} \Sigma (Zy - Yz) &= 0 \\ \Sigma (Xz - Zx) &= 0 \\ \Sigma (Yx - Xy) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (256) \end{aligned}$$

§ 106. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, имѣющей одну неподвижную точку. Избравъ неподвижную точку за центръ приведенія, замѣчаемъ, что равнодѣйствующая сила, даже и не будучи нулемъ, никакого дѣйствія на неизмѣняемую систему произвести не можетъ. Поэтому въ настоящемъ случаѣ неизмѣняемая система будетъ въ равновѣсіи, если моментъ равнодѣйствующей пары, а слѣдовательно и его проложенія на оси будутъ равны нулю. Условія равновѣсія будутъ таковы:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (Zy - Yz) &= 0 \\ \Sigma (Xz - Zx) &= 0 \\ \Sigma (Yx - Xy) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (257)$$

§ 107. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной только вращаться около нѣкоторой оси. Примемъ эту ось за ось z дедавъ. Ни равнодѣйствующая сила, ни проложенія момента равнодѣйствующей пары на оси x или y не могутъ двигнуть такую неизмѣняемую систему. Поэтому необходимое и достаточное условіе равновѣсія въ настоящемъ случаѣ будетъ:

$$\Sigma (Yx - Xy) = 0 \dots \dots \dots (258)$$

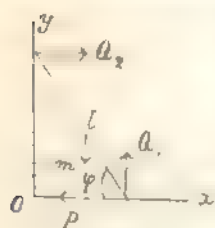
§ 108. Условія равновѣсія неизмѣняемой системы, способной вращаться около нѣкоторой оси Z и поступательно двигаться по направленію этой оси. Здѣсь неизмѣняемая система можетъ быть приведена въ движеніе поступательное только приложеніем ΣZ равнодѣствующей силы на ось Z , и во вращательное — проеціею момента равнодѣствующей пары на ось Z . Слѣдовательно для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \Sigma Z &= 0 \\ \Sigma (Yx - Xy) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (259)$$

§ 109. Условіе равновѣсія неизмѣняемой системы, способной двигаться только параллельно данной плоскости (xy) . Здѣсь неизмѣняемая система можетъ быть приведена въ движеніе только силами параллельными плоскости (x, y) и прямо параллельною этой плоскости. Слѣдовательно, для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= 0 \\ \Sigma Y &= 0 \\ \Sigma (Yx - Xy) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (260)$$

§ 110. Примѣръ. Определить положеніе равновѣсія балки l (фиг. 36), опирающейся однимъ концомъ въ горизонтальный полъ, другимъ о вертикальную стѣну, при чемъ нижній конецъ балки удерживается веревкою перекинутаю чрезъ блокъ съ навісаннымъ на нее грузомъ P и предполагается, что между балкою и стѣною, а также между балкою и поломъ нѣтъ никакого тренія; вѣсъ балки равенъ m .



Фиг. 36.

Условія равновѣсія будутъ

$$\Sigma X = P + Q_1 = 0$$

$$\Sigma Y = -m + Q_1 = 0$$

$$\Sigma (xY - yX) = l \cdot \cos \varphi \cdot Q_1 - \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi \cdot m - l \cdot \sin \varphi \cdot Q_1 = 0.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} Q_1 &= m, \quad Q_1 = P \\ \lg \varphi &= \frac{l \cdot Q_1 - \frac{ml}{2}}{l \cdot P} = \frac{m}{2P}. \end{aligned}$$

Последнее уравненіе показываетъ, что чѣмъ больше вѣсъ балки, тѣмъ больше долженъ быть уголъ φ , то-есть — тѣмъ круче она должна быть поставлена для равновѣсія.

Впослѣдствіи мы увидимъ, что существованіе тренія значительно измѣняетъ дѣло.

ГЛАВА IV.

О центрѣ тяжести.

§ 111. **Общія формулы для опредѣленія центра тяжести.** Центръ тяжести есть центръ параллельныхъ силъ тяжести точекъ системы. Поэтому координаты центра тяжести системы, состоящей изъ отдѣльныхъ точекъ, опредѣляются формулами (242).

Но посмотримъ какъ опредѣляются координаты центра тяжести сплошнаго тѣла.

Обозначимъ чрезъ ρ плотность тѣла. Вырѣжемъ въ немъ мысленно безконечно малый параллелепипедъ, съ ребрами параллельными осямъ координатъ. Объемъ такого параллелепипеда будетъ:

$$dx \cdot dy \cdot dz.$$

Масса его будетъ

$$m = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Вѣсъ каждаго такого элемента равенъ

$$mg = g \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

Слѣдовательно, формулы для опредѣленія координатъ центра тяжести сплошнаго тѣла получаются изъ формулы (242) замѣною въ нихъ силъ P силами $g \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ и замѣною суммъ тройными интегралами, распространенными на весь объемъ данного тѣла. Такимъ образомъ, для опредѣленія координатъ центра тяжести сплошнаго тѣла получаются формулы

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\int \int \int x \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int dx \, dy \, dz} \\ y &= \frac{\int \int \int y \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int dx \, dy \, dz} \\ z &= \frac{\int \int \int z \, dx \, dy \, dz}{\int \int \int dx \, dy \, dz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (261)$$

Пределы интегрированія выясняются въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ безъ особыхъ затрудненій. Покажемъ это на примѣрѣ.

§ 112. **Центръ тяжести четверти конуса.** Опредѣлимъ центръ тяжести однороднаго тѣла, имѣющаго видъ такой четверти конуса, которая помѣщается между плоскостями координатъ (фиг. 37), если ось конуса направлена по оси z координатъ, и основаніе отстоитъ отъ вершинны, помѣщенной въ началѣ координатъ, на разстояніи a .

Приготовимъ предварительно для настоящаго случая интегралы, входящіе въ формулы (261).

Уравненіе конуса таково:

$$y^2 + z^2 = k^2 x^2 \dots \dots \dots (262)$$

гдѣ k есть тангенсъ угла, составляемаго образующею съ осью конуса.

Изъ (262) имѣемъ:

$$z = \sqrt{k^2 x^2 - y^2}$$

Пределы по оси x будутъ: 0 и $\sqrt{k^2 x^2 - y^2}$.

Пределы по оси y будутъ: 0 и kx .

Пределы по оси z будутъ: 0 и a .

Вычисляемъ:

$$\int_0^{\sqrt{k^2 x^2 - y^2}} \int_0^{kx} \int_0^a dx dy dz = \int_0^{kx} \int_0^a \sqrt{k^2 x^2 - y^2} dx dy.$$

Далѣе, пользуясь формулою

$$\int \sqrt{A^2 - y^2} dy = \frac{1}{2} \left[y \sqrt{A^2 - y^2} + A^2 \cdot \arcsin \left(\frac{y}{A} \right) \right],$$

получимъ

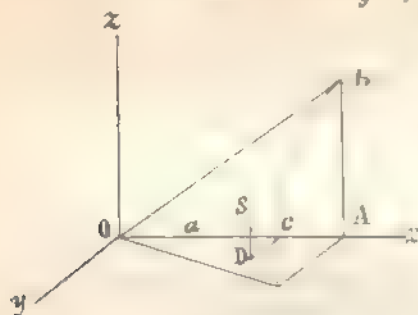
$$\begin{aligned} \int_0^{kx} \int_0^a \sqrt{k^2 x^2 - y^2} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^{kx} \left[y \sqrt{k^2 x^2 - y^2} + k^2 x^2 \cdot \arcsin \left(\frac{y}{kx} \right) \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{kx} \left[k^2 x^3 \cdot \frac{\pi}{2} \right] dx = \frac{a k^2 \pi}{12} \end{aligned}$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\iiint dx dy dz = \frac{a k^2 \pi}{12} \dots \dots \dots (263)$$

Вычисляемъ теперь

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{k^2 x^2 - y^2}} \int_0^{kx} \int_0^a x dx dy dz &= \int_0^{kx} \int_0^a x \sqrt{k^2 x^2 - y^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{kx} x \left[y \sqrt{k^2 x^2 - y^2} + k^2 x^2 \cdot \arcsin \left(\frac{y}{kx} \right) \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \left(k^2 x^3 \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{a^4 k^2 \pi}{16} \end{aligned}$$



Фиг. 97.

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int \int \int x \, dx \, dy \, dz = \frac{a^4 \cdot k \cdot \pi}{10} \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

Вычисляемъ теперь:

$$\int_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}} \int_0^{kx} \int_0^a y \cdot dx \, dy \, dz = \int_0^{kx} \int_0^a y \sqrt{k^2x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Далѣе пользуясь формулою:

$$\int y \sqrt{A^2 - y^2} \, dy = \frac{1}{3} (A^2 - y^2)^{\frac{3}{2}},$$

получимъ:

$$\begin{aligned} \int_0^{kx} \int_0^a y \sqrt{k^2x^2 - y^2} \, dx \, dy &= -\frac{1}{3} \int_0^a \left([k^2x^2 - y^2]^{\frac{3}{2}} \right)_0^{kx} dx = \\ &= \frac{1}{3} k^3 \int_0^a x^3 \, dx = \frac{k^4 a^4}{12} \end{aligned}$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int \int \int y \, dx \, dy \, dz = \frac{k \cdot a^4}{12} \quad . \quad . \quad . \quad (265)$$

Наконецъ вычисляемъ:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}} \int_0^{kx} \int_0^a z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{kx} \int_0^a \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{k^2x^2-y^2}} dx \, dy = \\ &= \int_0^{kx} \int_0^a \frac{(k^2x^2 - y^2)}{2} dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{kx} \int_0^a x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^{kx} \int_0^a y^2 \, dx \, dy = \\ &= \frac{k^3 x}{2} \int_0^a x^3 \, dx = \frac{k^3}{6} \int_0^a x^4 \, dx = \frac{k^4}{3} \int_0^a x^3 \, dx = \frac{k \cdot a^4}{12} \end{aligned}$$

Итакъ, въ настоящемъ случаѣ:

$$\int \int \int z \, dx \, dy \, dz = \frac{k^2 a^4}{12} \quad . \quad . \quad . \quad (266)$$

Подставляя теперь приготовленные въ (263), (264), (265), (266) ните-

гралы въ (261), получимъ:

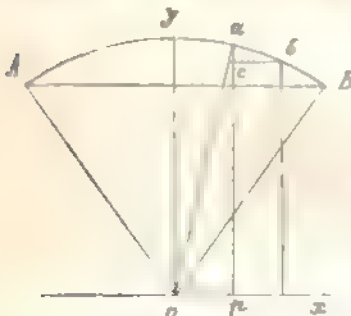
$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3}{4} a \\ y &= \frac{l}{\pi} a \\ z &= \frac{h}{\pi} a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (267)$$

Изъ чертежа (фиг. 37) видно, что $AB = l$.

Изъ формулы (267) видно, что для опредѣленія центра тяжести четверти конуса надо отъ точки C , лежащей на расстоянии $\frac{1}{4} l$ отъ вершины, отложить $CD = \frac{h}{\pi} = \frac{AB}{\pi}$ и изъ D параллельно оси z отложить $DS = \frac{AB}{\pi}$. Точка S и будетъ центромъ тяжести данной четверти конуса.

Изъ этого примѣра видно, что формулы (261) имѣютъ совершенно общій (приложимый ко всякому случаю сплошнаго тѣла) характеръ, но требуютъ сложныхъ вычисленій. Поэтому стараемся рѣшать задачи на опредѣленіе центра тяжести болѣе простыми путями, если это возможно. Къ рѣшенію такихъ задачъ мы и перейдемъ.

§ 113. Центръ тяжести дуги окружности. Примемъ биссектрису центральнаго угла, опирающагося на данную дугу за ось y -овую, перпендикулярный діаметръ—за ось x -овую. По (242) имѣемъ:



Фиг. 38

$$y = \frac{\sum m y}{\sum m},$$

гдѣ m суть элементы массъ пропорціональные вѣсу, они пропорціональны элементамъ дуги. Поэтому называя элементы дуги чрезъ $s_1, s_2, s_3, s_4 \dots$ и обозначая ихъ координаты соответственными значками, получимъ:

$$y = \frac{s_1 \cdot y_1 + s_2 \cdot y_2 + s_3 \cdot y_3 + \dots}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots} \quad (268)$$

Изъ подобія треугольниковъ abc и oap (фиг. 38) имѣемъ:

$$\frac{ab}{bc} = \frac{oa}{ap}.$$

Обозначая чрезъ δ проложеніе на ось x -овую дуговаго элемента ab , получимъ:

$$\frac{s}{\delta} = \frac{r}{y}$$

Отсюда:

$$s \cdot y = r \cdot \delta$$

Подставляя въ (268), получимъ:

$$\bar{y} = \frac{\sum r \delta}{\sum \delta} = \frac{r \cdot AB}{\text{дуга } AB}$$

Обозначая чрезъ φ половину центральнаго угла AOB , получимъ

$$y = \frac{2r \cdot \sin \varphi}{2r \cdot \varphi} = r \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

Итакъ:

$$y = r \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad (269)$$

По симметрии же дуги AB (относительно OC) y видимъ, что

$$x = 0.$$

Итакъ: Центр тяжести кривой окружности на биссектрисе соответственной центральному углу въ радиусѣ $r \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi}$ отъ центра.

§ 114. Центр тяжести полуокружности лежитъ очевидно, на радиусѣ перпендикулярномъ къ ея діаметру.

Для опредѣленія его разстоянія отъ центра достаточно въ формулѣ (269) положить:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Получимъ:

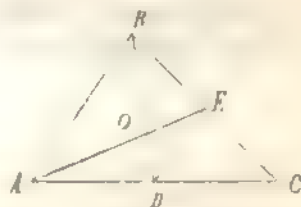
$$y = \frac{2r}{\pi} \quad (270)$$

§ 115. Центр тяжести площади треугольника. Разбивая площадь треугольника (фиг. 39) на безконечно узкія площади параллельныя основанію, замѣчаемъ, что центры тяжести всѣхъ такихъ полосекъ лежатъ на прямой, соединяющей вершину съ серединою основанія, такъ какъ эта прямая дѣлитъ пополамъ всѣ прямыя, проведенныя въ треугольникѣ параллельно основанію. Центр тяжести всей площади треугольника есть центр тяжести центровъ тяжести такихъ полосекъ. Поэтому онъ лежитъ на каждой изъ прямыхъ, соединяющихъ вершину треугольника съ серединою противоположной стороны. Такия прямыя называются *медианами*, которыя, какъ извѣстно, пересѣкаются въ одной точкѣ.

Итакъ: Центр тяжести площади треугольника находится на пересѣченіи медианъ.

Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ

$$\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DE} = 2$$



Фиг. 39

Слѣдовательно:

$$BO = \frac{2}{3} BD.$$

Поэтому можно сказать также *Центръ тяжести площади треугольника лежитъ на медианѣ въ разстояніи $\frac{2}{3}$ медианы отъ вершины*

§ 116 **Центръ тяжести кругового сектора.** Разбивъ мысленно безконечно близкими радиусами (фиг. 40) весь секторъ на безконечно малые треугольнички, заключаемъ, по предыдущему параграфу, что центры тяжести всѣхъ такихъ элементарныхъ треугольничковъ лежатъ на дугѣ описанной радиусомъ $\frac{2}{3} r$ изъ центра. Центръ тяжести всего сектора лежитъ, очевидно, въ центрѣ тяжести этой дуги, а послѣдній, согласно § 113-му, лежитъ на разстояніи равномъ произведенію радиуса дуги на отношеніе $\frac{\sin \varphi}{\varphi}$. Слѣдовательно центръ тяжести сектора лежитъ на разстояніи



Фиг. 40.

$$\frac{2}{3} r \cdot \frac{\sin \varphi}{\varphi} \dots \dots \dots (271)$$

отъ центра.

§ 117. **Центръ тяжести площади полуокруга.** Полагая въ (271)

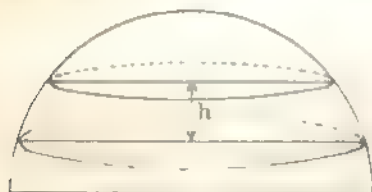
$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

получимъ, что разстояніе центра тяжести площади полуокруга отъ центра равно:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}.$$

§ 118. **Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса.** Изъ геометрии извѣстно, что поверхность сферическаго пояса равна:

$$2\pi r h,$$



Фиг. 41.

гдѣ r радиусъ, h высота пояса. Центръ тяжести такой поверхности, какъ видно изъ симметрии, лежитъ на радиусѣ, перпендикулярномъ основанію пояса. Плоскость параллельная основанію и проходящая чрезъ центръ тяжести должна расщѣпать поясъ на части имѣющія равныя массы и, слѣдовательно, на части имѣющія

равныя площади. Такая плоскость проходитъ чрезъ средину высоты h (фиг. 41), потому что она дѣлитъ поясъ на 2 части, равныя $2\pi r \frac{h}{2}$.

Слѣдовательно *Центръ тяжести поверхности сферическаго пояса лежитъ на срединѣ его высоты.*

§ 119. Центр тяжести поверхности полушарія. Изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ, что:

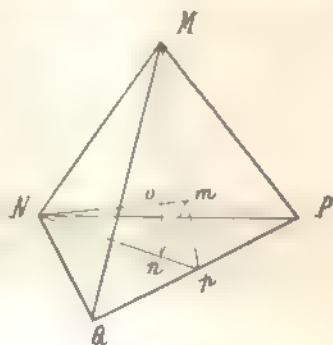
Центръ тяжести поверхности полушарія лежитъ на серединѣ радиуса перпендикулярнаго къ его основанію.

§ 120. Центр тяжести объема тетраэдра. Разобьемъ тетраэдръ (фиг. 42) на треугольныя пластинки параллельныя его основанію. Благодаря взаимному подобію этихъ пластинокъ ихъ центры тяжести лежатъ на прямой, соединяющей вершину M съ центромъ тяжести n основанія NPQ . По § 115-ому

$$nr = \frac{1}{3} Np.$$

Точно такъ же можно сказать, что, центр тяжести тетраэдра лежитъ на прямой Nm , соединяющей вершину N съ центромъ тяжести m грани MPQ и что:

$$pm = \frac{1}{3} Mr.$$



Фиг. 42

Слѣдовательно, центр тяжести тетраэдра лежитъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ Mn и Nm , соединяющихъ вершины съ центрами тяжести противоположныхъ граней.

Изъ подобія треугольниковъ имѣемъ:

$$mn = \frac{1}{3} MN.$$

$$om = \frac{1}{3} ON.$$

Слѣдовательно:

$$om = \frac{1}{4} Nm.$$

$$NO = \frac{3}{4} Nm.$$

Итакъ: *Центръ тяжести тетраэдра лежитъ на прямой, соединяющей вершину съ центромъ тяжести противоположной грани, въ разстояніи отъ вершины равномъ $\frac{3}{4}$ этой прямой.*

§ 121. Центр тяжести многогранной пирамиды. Разбьемъ многогранную пирамиду на тетраэдры, имѣющіе общую съ пирамидою вершину, и согласно предыдущему параграфу, заключаемъ, что:

Центръ тяжести многогранной пирамиды лежитъ на прямой, соединяющей вершину пирамиды съ центромъ тяжести ея основанія, въ разстояніи отъ вершины равномъ $\frac{3}{4}$ этой прямой.

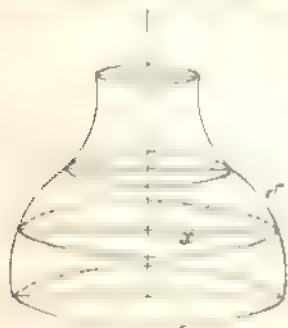
§ 122. Центр тяжести объема прямого круглого конуса. Разсматривая прямой круглый конусъ какъ пирамиду съ безконечнымъ числомъ граней, согласно съ § 121-ымъ находимъ, что:

Центръ тяжести объема прямого круглаго конуса лежитъ на его вы-
сотѣ въ $\frac{3}{4}$ этой высоты отъ вершины.

§ 123. Центр тяжести боковой поверхности прямого круглого конуса. Разбивая такую поверхность на безконечно малые треугольники, имѣющіе вершины въ вершинѣ конуса и основанія на окружности его основанія, заключаемъ, согласно съ § 115-ымъ, что:

Центръ тяжести боковой поверхности прямого круглаго конуса ле-
житъ на прямой, соединяющей вершину конуса съ центромъ основанія,
на разстояніи $\frac{2}{3}$ этой прямой отъ вершины.

§ 124. Теорема Гюльдена - Паппуса о поверхностяхъ. Положимъ, что



Фиг. 43.

оси y , описываетъ некоторую поверхность
вращенія. Разобьемъ кривую AB на безко-
нечно малые элементы δ . Разсмотримъ поясъ,
описанный однимъ изъ такихъ элементовъ.
Обозначимъ чрезъ x разстояніе элемента δ
отъ оси y . Поверхности пояса, описаннаго
элементомъ δ , будетъ

$$2\pi x \cdot \delta.$$

Поверхность всего тѣла будетъ

$$s = \sum 2\pi x \cdot \delta = 2\pi \sum x \cdot \delta \quad . \quad (272)$$

Разстояніе же центра тяжести дуги AB
отъ оси y , согласно съ (242) будетъ:

$$\frac{\sum x \cdot \delta}{\sum \delta} = \bar{x} \quad AB$$

Отсюда:

$$\sum x \cdot \delta = \bar{x} \cdot AB.$$

Вставляя въ (272), получимъ формулу.

$$s = 2\pi \bar{x} \cdot AB \quad . \quad . \quad . \quad (273)$$

выражающую теорему Гюльдена-Паппуса: Поверхность тѣла вращенія
равна произведенію длины окружности, описанной центромъ тяжести
меридіана, на длину меридіана.

§ 125. Теорема Гюльдена-Паппуса объ объемахъ. Представимъ себѣ
тѣло вращенія (фиг. 44), образованное вращеніемъ фигуры s около оси y ,
лежащей въ плоскости этой фигуры. Обозначимъ чрезъ s площадь вра-

щаемой фигуры, чрезъ δ —элементъ этой площади, находящійся на разстояніи x отъ оси y .

При одномъ полномъ оборотѣ элементъ δ описываетъ путь:

$$2\pi x$$

и объемъ

$$2\pi x \cdot \delta.$$

Объемъ всего тѣла вращенія будетъ:

$$V = \Sigma 2\pi x \cdot \delta = 2\pi \cdot \Sigma x\delta \dots \dots \dots (274)$$

Координата центра тяжести площади s , согласно (212) будетъ:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x\delta}{\Sigma \delta} = \frac{\Sigma x\delta}{s}$$

Отсюда:

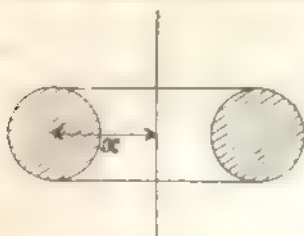
$$\Sigma x\delta = \bar{x} \cdot s.$$

Вставляя въ (274) получимъ формулу

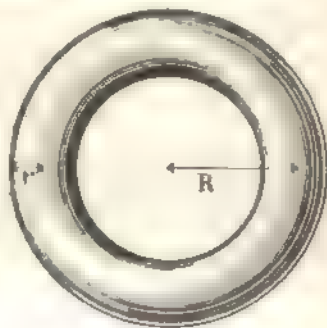
$$V = 2\pi \bar{x} \cdot s \dots \dots \dots (275)$$

выражающую вторую теорему Гюльдена-Поннуса: *Объемъ тѣла вращенія равенъ произведенію площади вращаемой фигуры, лежащей въ плоскости меридіана, на путь, пройденный ея центромъ тяжести въ теченіи полного оборота.*

§ 126. Примѣръ: поверхность и объемъ тора. Кольцо, образуемое вра-



Фиг. 44.



Фиг. 45.

шеніемъ круга радіуса r около оси y (фиг. 45), лежащей въ плоскости этого круга, называется *торомъ*. Обозначимъ чрезъ R разстояніе центра вращаемаго круга отъ оси вращенія. По первой теоремѣ Гюльдена поверхность тора равна:

$$2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr.$$

По второй теоремѣ Гюльдена объемъ тора равенъ:

$$2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

ОТДѢЛЪ III.

Движеніе какой бы то ни было системы точекъ.

ГЛАВА I.

Общія уравненія механики.

§ 127 Основная формула Лагранжа. Какова бы ни была данная система точекъ, находящаяся подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ, — относительно ея можно разсуждать слѣдующимъ образомъ, примѣняя къ ней начало Даламбера (§ 75) и принципъ возможныхъ перемѣщеній (§ 67).

Условимся обозначать значками 1, 2, 3 ... величины, относящіяся къ первой, второй, третьей .. точкамъ. Проложенія потерянныхъ силъ будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \\ Y_1 - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \\ Z_1 - m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} \\ X_2 - m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ Y_2 - m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (276)$$

Обозначимъ проложенія возможныхъ перемѣщеній на оси координатъ чрезъ $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \dots$ Припомнимъ формулу (183) выражающую, что для равновѣсія точки необходимо и достаточно, чтобы элементарная работа была бы не больше нуля

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \geq 0 \dots \dots \dots (183)$$

Начало Даламбера состоитъ въ томъ, что потерянные силы должны уравновѣшиваться въ теченіи движенія. Слѣдовательно проложенія (276)

потерянных силъ должны удовлетворять условію равновѣсія (183). Другими словами, чтобы получить условіе равновѣсія потерянныхъ силъ, которое должно быть всегда удовлетворено, необходимо и достаточно подставить вмѣсто X , Y , Z выражения (246) въ формулу

$$\Sigma [X\delta x + Y\delta y + Z\delta z] \leq 0 \quad . \quad . \quad . \quad (277)$$

представляющую собою распространение на систему формулы (183).

Получимъ:

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] \leq 0 \quad (278)$$

Эта формула представляет собою условіе равновѣсія потерянныхъ силъ. Это условіе, согласно началу Даламбера, должно удовлетворяться во всякомъ движеніи. Поэтому формула (278) представляет собою самую общую формулу движенія. Она была найдена Лагранжемъ (Lagrange 1766—1813) и выражаетъ движеніе какой бы то ни было системы точекъ, будутъ ли эта система отдельныхъ точекъ или сплошное тѣло — твердое, жидкое или газообразное.

Всѣ явленія неорганическаго мира приводятся къ движенію. Всякими движеніями управляетъ формула (278). Такимъ образомъ, формула (278) управляетъ всѣми явленіями неорганическаго мира—она представляет собою общій міровой законъ.

§ 128 Обобщеніе понятія о связяхъ. Движеніе одной точки можетъ быть, какъ мы видѣли (§ 60, 61), стѣснено тѣмъ, что точка принуждена двигаться по поверхности или по линіи, представляющей собою пересѣченіе двухъ поверхностей. Такая поверхность носитъ названіе *связей*.

Но въ системѣ точекъ могутъ существовать стѣсненія другого рода. Напримѣръ, двѣ какія-нибудь точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) системы могутъ быть подчинены условію, что разстояніе между ними R остается въ теченіи движенія неизмѣннымъ. Это условіе можетъ быть выражено равенствомъ:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - R^2 = 0 \quad . \quad . \quad (279)$$

Стѣсненіе движенія можетъ, напримѣръ, состоять въ томъ, что разстояніе между двумя точками системы можетъ сдѣлаться меньше R но не можетъ сдѣлаться больше R . Такому стѣсненію движенія подвергаются двѣ точки, связанныя между собою гибкою нитью длины R . Это стѣсненіе (связь) можетъ быть выражено неравенствомъ.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - R^2 \leq 0 \quad . \quad . \quad (280)$$

Формулы, подобныя (279) или (280), а также формулы, относящіяся къ удерживающимъ или неудерживающимъ поверхностямъ, выражающія условія движенія системы, называются *связями*. Связи, какъ мы видимъ, могутъ быть выражены равенствами или неравенствами.

§ 129. Уравнение Лагранжа въ 1-ой формѣ. Въ приложеніи къ опредѣленной задачѣ общая формула (278) распадается, какъ мы это сейчасъ увидимъ, на цѣлую систему дифференціальнхъ уравненій, выведенныхъ Лагранжемъ помощью способа неопредѣленныхъ множителей. Приведемъ этотъ знаменитый выводъ.

Вмѣсто того чтобы писать

$$\pi = 0,$$

условимся писать въ формулѣ (278),

$$-\delta\pi,$$

въ связяхъ

$$\delta f,$$

предполагая, что величины $\delta\pi$ и δf суть совершенно неопредѣленные величины, обладающія только тѣмъ свойствомъ, что въ случаѣ существованія равенства онѣ равны (вмѣстѣ или порознь, смотря по условію задачи) нулю: въ случаѣ же неравенства онѣ (вмѣстѣ или порознь) отрицательны.

Положимъ, что условия задачи вводятъ связи

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \delta y_1 + \dots &= 0 \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \dots &= 0 \end{aligned} \quad \dots (281)$$

Формулу (278) напшемъ въ видѣ:

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = \delta\pi \quad (282)$$

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (281) на неопредѣленный множитель λ_1 , 2-ое на λ_2 ... и сложимъ ихъ всѣхъ вмѣстѣ и съ уравненіемъ (282). Получимъ:

$$\begin{aligned} \Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} \right) \delta x + \right. \\ \left. \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} \right) \delta y + \right. \\ \left. \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) \delta z \right] \\ = \delta\pi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 + \dots + \lambda_k \delta f_k \end{aligned} \quad \dots (283)$$

гдѣ Σ распространяется на всѣ точки системы, число конхъ обозначимъ чрезъ n . Здѣсь содержатся, слѣдовательно $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta x_3, \delta y_3 \dots$ Выберемъ множители $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_k$ такъ, чтобы коэффиценты при k величинахъ $\delta x, \delta y \dots$ были нулями. Тогда остальные $3n-k$ изъ такихъ

называется центром тяжести, въ случаѣ дѣйствія какихъ бы то ни было силъ называется центромъ инерціи.

Примѣнимъ формулу (282) къ такой системѣ, для которой возможно *всякое* *поступательное* движение. Это значитъ, что всѣ точки системы могутъ имѣть общее перемѣщеніе имѣющее продолженіями δx , δy , δz одинаковые для всѣхъ точекъ, и точки могутъ произвести такое перемѣщеніе въ любомъ направленіи, такъ какъ поступательнымъ движениемъ системы мы вызываемъ такое ея движение, при которомъ всѣ траекторіи взаимно параллельны, всѣ проходящія одновременно пути равны и всѣ скорости равны.

Если, согласно такому предположенію, возможныя перемѣщенія всѣхъ точекъ имѣютъ одни и тѣ же продолженія δx , δy , δz , то ихъ можно въ формулѣ (282) вывести за знакъ суммы, и тогда получимъ:

$$\delta x \sum \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) + \delta y \sum \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) + \delta z \sum \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \delta \pi. \quad (286)$$

Но мы предположили, что *всякое* поступательное движение системы возможно. Следовательно величины δx , δy , δz совершенно произвольны: онѣ не связаны между собою никакою зависимою. Формула (286) не выражаетъ никакой зависимости между δx , δy , δz только въ томъ случаѣ, если коэффициенты при этихъ величинахъ порознь равны нулю. Следовательно: система, для которой возможно всякое перемѣщеніе, должна удовлетворять уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \sum \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= 0 \\ \sum \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= 0 \\ \sum \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (287)$$

Эти уравненія равносильны такимъ:

$$\left. \begin{aligned} \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum X \\ \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum Y \\ \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \sum Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (288)$$

Уравненія (287) или (288) называются дифференціальными уравненіями сохраненія движенія центра тяжести. Причина такого названія будетъ выяснена въ слѣдующемъ параграфѣ.

§ 131. Начало сохраненія движенія центра инерціи въ случаѣ существованія внѣшнихъ силъ. Въ томъ случаѣ, если на систему дѣйствуетъ

тяжесть, уравнения (242) получают видъ:

$$\left. \begin{aligned} x & \quad g \sum m x \\ & \quad g \sum m \\ y & \quad g \sum m y \\ & \quad g \sum m \\ z & \quad g \sum m z \\ & \quad \sum m \end{aligned} \right\} \quad (289)$$

По сокращеніи на g и обозначая массу $\sum m$ всей системы чрезъ M преобразуемъ уравненія (289) въ такіа.

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x} &= \sum m x \\ M \ddot{y} &= \sum m y \\ M \ddot{z} &= \sum m z \end{aligned} \right\} \quad (290)$$

Дифференцируя ихъ два раза, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (291)$$

Сравнивая (291) съ (288), получимъ уравненія:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma X \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma Y \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (292)$$

которыя тоже могутъ быть названы дифференціальными уравненіями сохранения движенія центра тяжести. Сравнивая ихъ съ уравненіями (117) получимъ слѣдующее выраженіе начала сохранения движенія центра инерціи. *Центръ инерціи системы, способной принимать всякое погранительное движеніе, движется такъ, какъ будто въ немъ была сосредоточена масса всей системы и все силы.*

Отсюда слѣдуетъ, напримѣръ, что вылетающая изъ ружья въ пустотѣ дроби летитъ такъ, что центръ тяжести всѣхъ дробинокъ описываетъ ту же самую траекторію, которую описалъ бы центръ пули, если бы при тѣхъ же условіяхъ и по тому же направленію выстрѣлъ былъ произведенъ въ пулю. Здѣсь вѣншая сила, дѣйствующая на систему, есть сила тяжести.

Другой примѣръ: центръ тяжести разлетающихся во всѣ стороны осколковъ гранаты описываетъ ту же самую траекторію, которую описала бы центръ тяжести гранаты, если бы она не лопнула. Если и бываетъ трудно во многихъ задачахъ опредѣлять движеніе всей системы, то по крайней мѣрѣ движеніе ея центра тяжести опредѣляется сравнительно легко по изложенному выше началу.

§ 132. Начало сохраненія движенія центра инерціи въ случаѣ отсутствія внѣшнихъ силъ. Если на систему не дѣйствуютъ никакія внѣшнія силы, а только силы взаимнаго притяженія или отталкиванія составляющихъ систему матеріальныхъ точекъ, то:

$$\sum X = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$\sum Z = 0$$

и уравненія (292) принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} &= 0 \\ M \frac{d^2 \bar{y}}{dt^2} &= 0 \\ M \frac{d^2 \bar{z}}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (293)$$

Эти уравненія (293) весьма просто интегрируются. А именно: первые интегралы ихъ суть:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dx}{dt} &= b_1 \\ M \frac{dy}{dt} &= b_2 \\ M \frac{dz}{dt} &= b_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (294)$$

гдѣ b_1 , b_2 , b_3 суть постоянныя интеграціи. Интегрируя уравненія (294), получимъ вторые интегралы уравненій (293):

$$\left. \begin{aligned} Mx &= a_1 + b_1 t \\ My &= a_2 + b_2 t \\ Mz &= a_3 + b_3 t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (295)$$

Эти уравненія (295) показываютъ, что, въ случаѣ отсутствія внѣшнихъ силъ центръ тяжести системы движется равномерно и прямолинейно, потому что уравненія эти линейныя (1-го порядка) относительно x , y , z , t .

Изъ вѣхъ имѣемъ:

$$r = \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}}{dt}\right)^2} \quad \sqrt{b^2 + b^2 + b^2}.$$

Солнечная система, напримѣръ, настолько удалена отъ вѣхъ неподвижныхъ звѣздъ, что подвержена только взаимнымъ притяженіямъ планетъ и солнца. Поэтому центръ тяжести солнечной системы движется равномерно и прямолинейно. Наблюдения дѣйствительно показали, что такое движеніе происходитъ и что оно направлено къ созвѣздію Геркулеса.

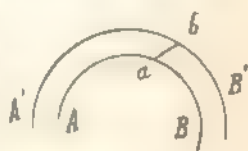
ГЛАВА III.

Начало сохраненія живой силы.

§ 133. Начало сохраненія живой силы. Мы видѣли, что нѣкоторыя изъ связей представляются поверхностями, по которымъ принуждена двигаться та или другая точка системы. Пусть AB (фиг. 46) представляетъ собою такую поверхность. Эта поверхность не измѣняетъ своего вида, если коэффициенты ея уравненія не зависятъ отъ времени.

Въ такомъ случаѣ перемѣщенія точки могутъ совершаться по этой поверхности, и потому возможные перемѣщенія $\delta x, \delta y, \delta z$ будутъ тождественны съ dx, dy, dz , удовлетворяющими уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$



Фиг. 46.

Если же уравненіе связи содержитъ время, то дѣло происходитъ иначе. На чертежѣ (фиг. 46) изображены два положенія измѣняющейся связи. Здѣсь перемѣщеніе ab точки не тождественно съ перемѣщеніемъ ея по поверхности въ первоначальномъ видѣ. Слѣдовательно здѣсь $\delta x, \delta y, \delta z$ не тождественны съ dx, dy, dz .

Остановимся на первомъ случаѣ: предположимъ, что коэффициенты уравненія связи не зависятъ отъ времени.

Въ этомъ случаѣ въ основной формулѣ (278):

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0. \quad (278)$$

величины $\delta x, \delta y, \delta z$ могутъ быть замѣнены дифференціалами dx, dy, dz . Если такой замѣны основная формула (278) обращается въ:

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) dx + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) dy + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dz \right] = 0. \quad (296)$$

Отсюда:

$$\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) = \sum (X dx + Y dy + Z dz) \quad . . . (297)$$

Введемъ еще новое условие: положимъ, что *вся тѣлѣлая система имѣетъ потенциальную функцию* U . Тогда (297) обращается въ

$$\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) . (298)$$

Величина въ правой части этого уравненія есть полный дифференциалъ dU . Следовательно (298) обращается въ

$$\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \right) = dU . (299)$$

Преобразуемъ теперь лѣвую часть уравненія (299). Для этого припомнимъ, что:

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 .$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} d(\sum m V^2) &= \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2 z}{dt^2} \right) dt \\ &= \frac{d^2 x}{dt^2} dx + \frac{d^2 y}{dt^2} dy + \frac{d^2 z}{dt^2} dz \end{aligned} \right\} \quad (300)$$

Слѣдовательно (299) обращается въ:

$$\frac{1}{2} d(\sum m V^2) = dU . \quad . . . (301)$$

Интегрируя (301), получимъ:

$$\sum \frac{m V_0^2}{2} = U + C \quad (302)$$

гдѣ C постоянная интегрированія. Положимъ, что въ некоторый моментъ скорость была V_0 , потенциальная функция была U_0 . Тогда для этого момента (302) приметъ видъ:

$$\sum \frac{m V_0^2}{2} = U_0 + C \quad (303)$$

Вычитая (303) изъ (302), получимъ

$$\sum \frac{m V^2}{2} - \sum \frac{m V_0^2}{2} = U - U_0 \quad (304)$$

Величина $\sum \frac{m V^2}{2}$ называется *живою силою системы*. Уравненіе (304) выражаетъ собою *начало сохранения живой силы*. Пояснимъ, въ чемъ оно состоитъ.

Замѣтимъ, что U есть *функция положенія*, то есть функция только координатъ x, y, z . при данныхъ x, y, z для всѣхъ точекъ системы функция U принимаетъ вполнѣ определенное значеніе: при данномъ расположеніи точекъ системы U имѣетъ вполнѣ определенную величину. Уравненіе (304) показываетъ, следовательно, что: при перемѣщеніи системы изъ одного расположенія въ другое разность живыхъ силъ, которая система имѣетъ въ 1-мъ и во 2-мъ расположеніяхъ, равна разности соотвѣствующихъ потенциальныхъ функций.

Но, если система, выходя изъ даннаго расположенія, возвращается къ нему же, переходя чрезъ рядъ другихъ расположеній, то $U - U = 0$. Тогда, согласно (304), получимъ:

$$\sum \frac{mV^2}{2} = \sum \frac{mV'^2}{2}.$$

Слѣдовательно: при возвращеніи системы къ прежнему расположенію и живыя силы ея принимаютъ точно ту же величину, какую они имѣли въ началѣ приращенія расположенія. Въ этомъ и состоитъ начало сохраненія живой силы.

Оно можетъ быть выражено еще иначе. Уравненіе (304) показываетъ, что приращеніе живой силы системы зависитъ только отъ перваго и послѣдняго значенія потенциальной функции, зависитъ, следовательно, только отъ координатъ точекъ системы въ первомъ расположеніи и отъ координатъ точекъ системы въ послѣднемъ расположеніи и не зависитъ отъ координатъ промежуточныхъ расположеній. Слѣдовательно:

Но какими бы путями, по какому бы пути ни шло, система изъ одного расположенія въ другое, — приращеніе живой силы останется тѣмъ же.

§ 134. Уравненіе живой силы. Уравненію (304) можно придать другой видъ и начало сохраненія живой силы формулировать иначе, именно такъ, какъ это удобно для практической механики.

Лѣвая часть уравненія (297), какъ мы видѣли, равна $d\sum \frac{mV^2}{2}$, правая часть уравненія (297) есть сумма элементарныхъ работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ (см. § 67).

Сумма работъ всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ называется работою этихъ силъ. Слѣдовательно уравненію (304) можно дать видъ:

$$d\sum \frac{mV^2}{2} = \left. \begin{array}{l} \text{работѣ всѣхъ силъ дѣйствующихъ} \\ \text{на систему въ теченіи времени } dt. \end{array} \right\} \quad (305)$$

Поэтому $\sum \frac{mV^2}{2} = \sum \frac{mV'^2}{2}$ равно работѣ T всѣхъ дѣйствующихъ на систему силъ за время $t - t_0$. Итакъ:

$$\sum \frac{mV^2}{2} = \sum \frac{mV_0^2}{2} + T \quad (306)$$

Уравнение (306) называется уравнением живой силы. Оно выражается словами такъ.

Приращение живой силы равно работѣ; при чемъ подразумѣвается работа силъ, дѣйствовавшихъ на систему за время, въ теченіи котораго это приращение живой силы совершилось. Изъ этой теоремы и изъ слагающаго въ концѣ § 133 выводимъ: Работа дѣйствующихъ силъ, потребная для перевода системы изъ одного расположенія въ другое, не зависитъ отъ путей, по которымъ этотъ переходъ происходитъ.

По этой теоремѣ оказывается, что для поднятія даннаго груза на данную высоту требуется совершенно опредѣленная работа, величина которой не зависитъ отъ устройства подъемныхъ приспособленій: будемъ ли мы поднимать грузъ вертикально или по наклонной плоскости или иною машиною, будемъ ли мы его поднимать тихо или скоро, работа потребная для поднятія груза будетъ одна и та же. Мы можемъ измѣнять только силу потребную для подъема, а именно: въ теченіи долгаго времени можно подаять на извѣстную высоту данный грузъ меньшею силою чѣмъ въ теченіи короткаго, но работу придется затратить ту же. Здѣсь говорится о всѣхъ силахъ, побѣждающихъ или способствующихъ дѣйствию силы тяжести груза, слѣдовательно и о такихъ сопротивленіяхъ, какъ треніе, такъ что понятно, что чѣмъ меньше треніе въ подъемной машинѣ, тѣмъ меньшая работа требуется отъ поднимающихъ силъ.

Принципъ, выражаемый уравненіемъ живой силы, выражается практиками, не совсѣмъ точно, словами: *процѣпывая въ скорости, вымываемъ въ силѣ* дѣйствуя съ большою скоростью на длинный конецъ рычага или на конецъ полисваста (таля) поднимаемъ грузъ, прикрепленный къ короткому концу рычага, или къ другому концу талья, съ малою скоростью, но зато такимъ приспособленіемъ можемъ малою силою поднять большой грузъ. Однако, пренебрегая треніемъ, замѣтимъ, что положительная работа малой подъемной силы на большомъ пути, проходящемъ точкою ея приложения, въ точности равна отрицательной работѣ большого груза на маломъ пути проходящемъ точкою его приложения, если грузъ поднимается равномерно.

§ 135. Уравненіе сохраненія энергіи. Уравненію (304) можно придать еще третій видъ, имѣющий особенно важное значеніе въ физикѣ. Изберемъ тотъ моментъ, для котораго мы обозначаемъ скорость чрезъ V_0 , потенціалъ чрезъ U_0 , такъ, чтобы для этого момента потенциальная функція принимала свою максимальную величину, такъ чтобы:

$$U_0 = U_{\max}.$$

Уравненіе (304) приметъ видъ:

$$\Sigma \frac{m V^2}{2} + (U_{\max} - U) = \Sigma \frac{m V_0^2}{2}.$$

Но $\Sigma \frac{mV^2}{2}$ есть величина постоянная. Следовательно

$$\Sigma \frac{mV^2}{2} + (U_{\text{пот}} - U) = \text{const} \dots \dots \dots (307)$$

Величину $\Sigma \frac{mV^2}{2}$, то есть живую силу называют *кинетическою энергиею системы*.

Величину $(U_{\text{пот}} - U)$ называют *потенциальною энергиею системы*.

Сумму кинетической и потенциальной энергии называют *полною энергиею системы*.

Уравнение (307) показывает, что *полная энергия системы есть величина постоянная*. Это уравнение (307) служит математическим выражением знаменитаго закона сохранения энергии.

§ 136. Условія при которых существует потенциальная функция. Мы видели, что начало сохранения живой силы применимо только къ такимъ случаямъ, когда для дѣйствующихъ силъ существуетъ потенциальная функция. Докажемъ, что она существуетъ въ одномъ весьма общемъ классѣ случаевъ.

Теорема: Если разсматривается движение такой системы, въ которой не дѣйствуютъ никакія силы кромѣ притяженія къ неподвижнымъ центрамъ и притяженія точекъ между собою, то, въ какомъ-бы законѣ ни дѣйствовали эти притяженія, всегда для такого движения существуетъ такая функция U координатъ точекъ, производная которой по этимъ координатамъ равна проложеніямъ силъ на оси координатъ. Эта функция U и называется потенциальною функциею. Для доказательства этой теоремы разсмотримъ три случая.

1) Точка (x, y, z) притягивается неподвижнымъ центромъ (a, b, c) .

Разстояніе r точки отъ центра опредѣляется формулою

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Дифференцируя по x , получимъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \frac{x-a}{r^2} = \frac{x-a}{r}$$

Называя чрезъ α, β, γ углы, образованные разстояніемъ r съ осями координатъ, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \alpha \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \cos \beta \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (308)$$

Точно такъ же получимъ:

Слѣдовательно, проложія X , Y , Z притяженія ($-P$, оказываемаго центромъ на точку будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= -P \cdot \cos \alpha = -P \frac{\partial r}{\partial x} \\ Y &= -P \cdot \cos \beta = -P \frac{\partial r}{\partial y} \\ Z &= -P \cdot \cos \gamma = -P \frac{\partial r}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (309)$$

Называя чрезъ U интеграль $\int P dr$, то есть полагая:

$$U = \int -P dr \dots \dots \dots (310)$$

получимъ, согласно съ (310):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -P \frac{\partial r}{\partial x} = X$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -P \frac{\partial r}{\partial y} = Y$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -P \frac{\partial r}{\partial z} = Z$$

Итакъ, въ данномъ случаѣ существуетъ такая функція U , для которой

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= X \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= Y \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= Z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (311)$$

она именно равна $\int -P dr$, какъ это видно изъ (310). Эта функція удовлетворяетъ уравненіямъ (311). Слѣдовательно въ настоящемъ случаѣ существуетъ потенциальная функція.

2. Система состоитъ изъ двухъ свободныхъ точекъ взаимно притягивающихся съ силою P . Разстояніе r между этими точками определяется формулою:

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \dots \dots (312)$$

Проложенія силы, дѣйствующія на точку (x_1, y_1, z_1) будутъ:

$$X_1 = -P \frac{\partial r}{\partial x_1}; Y_1 = -P \frac{\partial r}{\partial y_1}; Z_1 = -P \frac{\partial r}{\partial z_1} \dots \dots (313)$$

Проложенія силы, дѣйствующей на точку (x_2, y_2, z_2) будутъ:

$$X_2 = -P \frac{\partial r}{\partial x_2}; Y_2 = -P \frac{\partial r}{\partial y_2}; Z_2 = -P \frac{\partial r}{\partial z_2} \dots \dots (314)$$

Эти проложёнія (314) равны и противоположны проложёніямъ (313), потому что изъ (312) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1 - x_2}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y_1} = \frac{y_1 - y_2}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z_1} = \frac{z_1 - z_2}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = -\frac{x_1 - x_2}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y_2} = -\frac{y_1 - y_2}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z_2} = -\frac{z_1 - z_2}{r}$$

такъ что

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{\partial r}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial r}{\partial y_1} = -\frac{\partial r}{\partial y_2}; \quad \frac{\partial r}{\partial z_1} = -\frac{\partial r}{\partial z_2}.$$

Полагая:

$$\int -P \, dr = U$$

получимъ:

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}; \quad Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}; \quad Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}; \quad X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}; \quad Y_2 = \frac{\partial U}{\partial y_2}; \quad Z_2 = \frac{\partial U}{\partial z_2}$$

Итакъ, и въ случаѣ взаимнаго притяженія двухъ свободныхъ точекъ потенциальная функція существуетъ.

3) Система состоитъ изъ какою-бы то ни было числа взаимно притягивающихся точекъ: $m_1, m_2, m_3, m_4 \dots$

Обозначимъ разстояніе между точками m_i и m_j чрезъ r_{ij} , такъ что, напримѣръ, разстояніе между точками m_2 и m_4 будетъ r_{24} . Силу, съ которою притягиваются взаимно точки m_i и m_j обозначимъ чрезъ P_{ij} .

Складывая проложёнія всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на одну точку, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= \frac{\partial (U_{12} + U_{13} + \dots)}{\partial x_1} = X_1 \\ m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \frac{\partial (U_{12} + U_{13} + \dots)}{\partial y_1} = Y_1 \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= \frac{\partial (U_{12} + U_{13} + \dots)}{\partial z_1} = Z_1 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= \frac{\partial (U_{21} + U_{23} + \dots)}{\partial x_2} = X_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (315)$$

Значенія U со значками обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что въ каж-
дое изъ нихъ входятъ координаты только тѣхъ двухъ точекъ, которыя
притягиваются равными одному изъ значковъ поставленныхъ при U . По-
тому производныя показанныхъ въ правыхъ частяхъ уравненій (315) дифферен-
цируемыхъ, будутъ равны нулю, напримѣръ, такія производныя, какъ
 $\frac{\partial U_{12}}{\partial x_3}$ и $\frac{\partial U_{12}}{\partial y_3}$, отъ $U_{23}, U_{34} \dots$ Вообще, при дифференцирова-

ни по x_1, y_1, z_1 не обратятся въ нуль только производныя отъ U_{12}, U_{13}, U_{14} . Поэтому уравненія (315), относящіяся къ точкѣ (x_1, y_1, z_1) останутся вѣрными, если присоединить еще ко вторымъ членамъ производныя отъ суммы $U_{12}, U_{13}, U_{14}, \dots$ всѣхъ остальныхъ U . Подобнымъ же образомъ можно дополнить и остальные уравненія. Тогда во всѣхъ вторыхъ членахъ уравненій (315) получимъ частныя производныя отъ одной и той же функціи

$$U = (U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} + U_{24} + \dots + U_{34} + \dots)$$

Сами же уравненія (315) дадутъ:

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

$$Y_1 = \frac{\partial U}{\partial y_1}$$

$$Z_1 = \frac{\partial U}{\partial z_1}$$

$$X_n = \frac{\partial U}{\partial x_n}$$

Итакъ, въ случаѣ взаимныхъ притяженій и отталкиваній (разсматриваемыхъ какъ отрицательныя притяженія) сопровождаемыхъ притяженіями къ неподвижнымъ центрамъ, существуетъ потенциальная функція. Теорема доказана.

§ 137. Консервативная система Система, въ которой работа существующихъ въ ней силъ, потребная для перевода этой системы изъ одного опредѣленнаго расположенія въ другое не зависитъ отъ путей, по которымъ этотъ переходъ совершается, называется *консервативною*. Изъ этого опредѣленія и изъ § 134 слѣдуетъ, что *консервативною* системою можно называть всякую систему, къ которой применимо начало сохраненія живой силы.

Изъ § 136 слѣдуетъ, что къ числу консервативныхъ системъ относятся также и система взаимно притягивающихся точекъ и неподвижныхъ притягивающихъ центровъ, по какому бы закону ни происходили въ эти притяженія.

§ 138. Энергія. Изъ §§ 135, 136, 137 слѣдуетъ, что энергія консервативной системы есть величина постоянная и что она равна суммѣ энергій кинетической и потенциальной. Для того чтобы уяснить себѣ какое физическое значеніе имѣетъ *полная энергія*, — рассмотримъ знакомый уже намъ примѣръ. Тяжелая точка m поднята на высоту h отъ земли и затѣмъ предоставлена дѣйствію тяжести. Тогда она падаетъ. Если за начало координатъ принять ту точку пространства, до которой была поднята точка m и взять ось z по вертикали внизъ, то потенциальная функція

будетъ mgz : максимальная ея величина равна въ данномъ случаѣ mgh . Уравненіе (307) принимаетъ, слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} + mg(h - z) = \text{const} \dots \dots \dots (316)$$

Здѣсь $mg(h - z)$ есть та работа, которую осталось еще произвести силѣ тяжести до полного паденія точки на землю.

Чтобы увидать чему равенъ const. , замѣтимъ, что, при $z = 0$, скорость $v = 0$ и (316) принимаетъ видъ

$$mgh = \text{const.}$$

Итакъ полная энергія въ данномъ случаѣ равна mgh — работѣ, производимой силою тяжести на протяженіи полного паденія точки съ высоты h .

Въ моментъ t , для котораго написано уравненіе (316), потенциальная энергія $mg(h - z)$ — работѣ, которую осталось еще произвести силѣ тяжести. Съ теченіемъ времени z увеличивается, и потому эта потенциальная энергія $mg(h - z)$ уменьшается все меньше и меньше работы остается произвести силѣ тяжести.

Итакъ, потенциальная энергія можетъ быть рассматриваема какъ способность произвести работу.

Кинетическая энергія $\sum \frac{mv^2}{2}$ тоже способна произвести работу. Это видно непосредственно изъ уравненія (306) живой силы, а также и изъ того, что тѣло обладающее живою силою $\sum \frac{mv^2}{2}$, ударяясь о препятствіе, производитъ, какъ мы знаемъ, работу перемѣщенія частицъ того предмета, о который ударяется, и эта работа производится, по уравненію (306) именно на счетъ уменьшенія кинетической энергіи $\sum \frac{mv^2}{2}$. Во время движенія дѣйствующія силы производятъ работу $\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}$, тѣло же производитъ этой работѣ отрицательную работу. При разрушеніи препятствія тѣло производитъ положительную работу равную $\sum \frac{mv^2}{2}$. Полная энергія можетъ быть, поэтому, опредѣлена какъ полная способность системы къ совершенію работы.

Уравненіе (316), наприимѣръ, показываетъ, что существующая въ разсматриваемой системѣ сила тяжести въ моментъ t способна еще произвести работу равную потенциальной энергіи $mg(h - z)$, да сама движущаяся точка способна произвести работу равную кинетической энергіи $\frac{mv^2}{2}$.

Такая же работоспособность системы (точки и дѣйствующей на нее силы тяжести) равна суммѣ энергій кинетической и потенциальной, то-есть полной энергіи.

Въ сущности какой-бы то ни было сложной системы можно сказать то же самое. Дѣйствительно, кинетическая энергія можетъ быть переведена въ работу, какъ это видно изъ 306; потенциальная энергія можетъ быть

тоже переведена въ работу, какъ это видно изъ того, что, согласно со сказаннымъ въ §§ 133 и 135:

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \int_{t_0}^t du \dots \dots \dots (317)$$

равняется полной работѣ силъ за время $t - t_0$, такъ что всякая разность $U - U_0$ эквивалентна работѣ.

Итакъ:

Энергия есть полная работоспособность данной системы и дѣйствующихъ въ ней и на нее силъ.

Энергия консервативной системы есть величина постоянная. Въ этомъ состоитъ механическое выраженіе принципа сохраненія энергіи, математическое выраженіе котораго заключается въ уравненіи (307).

§ 139. Законъ сохраненія энергіи. Въ видѣ формулы

$$\Sigma m \left[\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right] = \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) \dots (318)$$

законъ сохраненія энергіи былъ извѣстенъ еще Лавгравжу. Какъ законъ сохраненія живой силы, онъ былъ усмотрѣнъ еще Иваномъ Бернулли и установленъ Данииломъ Бернулли въ 1748 году. Но въ полномъ своемъ объемѣ, какъ основной законъ физики, то-есть въ приложеніи ко всемъ переходамъ энергіи изъ одного вида въ другой, этотъ законъ былъ открытъ одновременно Робертомъ Майеромъ (*Mayer: Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Annal. d. Chem. u. Pharm. 1842 Bd. 42*) и Гельмгольцемъ (*Helmholtz: Die Erhaltung der Kraft. 1847*) *).

Въ этой общей формѣ законъ сохраненія энергіи можетъ быть выраженъ такъ. *Энергия не исчезаетъ и не образуется вновь, но энергія одного вида можетъ перейти въ эквивалентное количество энергіи другого вида.*

Напримѣръ тепловая энергія одной большой калоріи можетъ перейти въ 426 килограмметровъ работы.

Законъ сохраненія энергіи полагается современною наукою въ основаніе естествознанія наряду съ химическимъ закономъ сохраненія матеріи.

Достоверность его не вытекаетъ изъ основныхъ законовъ Ньютона: мы видѣли, что онъ вѣренъ только для консервативныхъ системъ. Но всѣ имѣющіеся до сего времени наблюденія и опыты подтверждаютъ вѣрность этого закона: силы природы—оказывается—обладаютъ консервативнымъ

*). Еще въ 1760 г. Ломоносовъ довольно ясно проводилъ и законъ сохраненія энергіи и переходъ работы въ тепло. Онъ, напримѣръ, писалъ «Вѣд. перомышл. въ натурѣ случаются такого суща состоянія, что сколько чего у одного тѣла отнимется, столько присовокупится къ другому. Сей всеобщій естественный законъ простирается и въ самыя правила движенія по тѣло движущее своею силою другое, столько-же оныя у себя теряетъ, сколько сообщаетъ другому, которое отъ него движеніе получаетъ». См. *Меллеркина. Ломоносовъ какъ физико-химикъ* (Жур. рус. физ. хим. общ. т. XXXVI вып. 6, 8, 9).

характеромъ. Поэтому достоинство закона сохранения энергии равносильно достоинству основныхъ законовъ Ньютона, которые тоже выведены изъ наблюдений и опыта

Уравнение (306) живой силы можетъ быть выражено такъ: *если работа совершается вынужденно для тѣла силами, то она измѣряется приращеніемъ живой силы тѣла, если же работа совершается тѣломъ, то-есть на счетъ его кинетической энергии, то эта работа измѣряется убылью его живой силы.*

При поверхностномъ взглядѣ на нѣкоторыя явленія можно не усмотрѣть закона сохранения энергии, который выделяется, какъ только начнемъ глубже вникать въ дѣло. Напримѣръ, поверхностному наблюдателю можетъ показаться, что работа, совершаемая силою протаскивающей грузъ равномернымъ движениемъ по горизонтальной доскѣ затрачивается безслѣдно. При ближайшемъ разсмотрѣніи дѣла замѣтимъ, что такой процессъ сопровождается звукомъ, слышится шорохъ, часть работы пошла на приведение воздуха въ колебательное движение — на образование звуковыхъ волнъ; процессъ этотъ сопровождается нагреваніемъ доски и груза: часть работы пошла на развитіе живой силы молекулярныхъ движений, называемыхъ теплотою.

Поднимемъ грузъ на извѣстную высоту; для этого приходится затратить нѣкоторую работу, но она не пропадаетъ, а превращается въ потенциальную энергию, которая можетъ перейти опять въ работу при паденіи груза; такова работа производимая, напримѣръ, гирею часовъ. За-вѣдя карманные часы, мы затрачиваемъ работу на сгибаніе часовой пружины, но при этомъ образуемъ потенциальную энергию упругихъ силъ пружины, которая потомъ, переходя въ работу, приводитъ въ движеніе часовой механизмъ.

Заслуга Майора и Гельмгольца заключается въ томъ, что они усмотрѣли во всѣхъ явленіяхъ природы различныя виды энергии, которые дѣлятся къ двумъ типамъ, кинетической энергии и потенциальной и усмотрѣли переходъ энергии изъ одного вида въ другой.

Къ потенциальной энергіи относятся: энергія массъ, притягивающихся къ закону всемірнаго тяготѣнія, энергія упруго-измѣнливаго тѣла, энергія движенія частицъ, рѣзко мѣняющаяся при переходѣ тѣла изъ твердаго состоянія въ жидкое и изъ жидкаго въ газообразное, энергія химическаго состава, энергія электростатическая и энергія магнитная.

Къ кинетической энергіи относятся: энергія движенія тѣла какъ тѣлаго, тѣла тепловая, измѣряемая живою силою беспорядочныхъ движеній частицъ, энергія звуковыхъ колебаній, лучистая энергія эфира, проявляющаяся свѣтомъ, электрическими лучами Герца и лучистою теплотою, кинетическая энергія эфира называемая электрическимъ токомъ.

140 Невозможность *perpetuum mobile*. Такой процессъ претерпѣваемый живую систему, при которомъ система періодически возвращается въ начальное состояніе, называется циклическимъ. Каждый такой

периодъ называется цикломъ. Если законъ сохранения энергій вѣренъ по отношению ко всемъ процессамъ, совершающимся въ природѣ, то данная система можетъ произвести работу только въ томъ случаѣ, если скорости ея перваго положенія отличны отъ скоростей послѣдняго положенія, потому что только въ этомъ случаѣ лѣвая часть уравненія

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = T$$

не равна нулю.

Въ циклическомъ же процессѣ при совершении каждаго цикла скорости возвращаются къ прежнимъ своимъ значеніямъ и потому въ теченіи цикла или цѣлаго числа цикловъ

$$\sum \frac{mv_0^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0$$

система не производитъ, сама по себѣ безъ получения энергій извнѣ, никакой работы.

Всѣ двигатели, то-есть машины дающія работу, потребляютъ для произведенія ея энергію извнѣ: паровыя машины потребляютъ потенциальную энергію угля, часы потребляютъ энергію гири или пружины и для того, чтобы опять завести ихъ поднятіемъ гири или сгибаніемъ пружины, требуется энергія извнѣ; коноватый приводъ потребляетъ энергію привагой лошадыми пицы; водяной двигатель потребляетъ энергію паденія воды, для поднятія которой потребовалась бы энергія извнѣ.

Подъ названіемъ *perpetuum mobile* разумѣть машину, которая совершала бы циклическій процессъ, служащій источникомъ работы, безъ потребления на ея произведеніе энергій со стороны.

Изъ сказаннаго видно, что существованіе *perpetuum mobile* противорѣчитъ закону сохранения энергій, если бы *perpetuum mobile* было осуществлено, то пришлось бы отказаться отъ принципа сохранения энергій.

Но законъ этотъ оправдывается во всехъ извѣстныхъ намъ явленіяхъ. Что же касается *perpetuum mobile*, то съ нимъ дѣло обстоитъ еще хуже: если бы даже и оказался возможнымъ циклическій процессъ, творящій работу изъ ничего, то для получения пользы отъ этой работы необходимо было бы, чтобы за преодоленіемъ тренія и другихъ вредныхъ сопротивленій, отъ существованія которыхъ невозможно избавиться, оставалась еще часть даромъ полученной работы на преодоленіе полезныхъ сопротивленій, то есть тѣхъ сопротивленій, преодоленіе которыхъ составляетъ цѣль машины.

Людей, теряющихъ время надъ придумываніемъ *perpetuum mobile*, соблазняетъ движеніе планетъ. Но движеніе планеты около солнца не даетъ работы. Планета движется по эллипсу, въ одномъ изъ фокусовъ котораго находится солнце; при приближеніи планеты къ вершинѣ эллипса ближайшей къ солнцу увеличивается скорость и, слѣдовательно, кинетическая энергія планеты на счетъ уменьшенія ея потенциальной энергій;

при удалении планеты от солнца дѣло происходитъ обратно: потенциальная энергія увеличивается на счетъ кинетической. Работа притягательной силы солнца положительна при приближеніи къ нему планеты и отрицательна при удаленіи ея отъ солнца: въ теченіи полнаго обращенія планеты работа этой силы равна нулю.

Самый дешевый двигатель - водяной, но и онъ не *perpetuum mobile*, потому что съ теченіемъ времени портится, да и существованіе данной рѣки ограничено геологическимъ періодомъ значительно меньшимъ вѣчности.

§ 141. Начало сохраненія живой силы примѣнимо только къ полной совокупности дѣйствующихъ на систему силъ. Разсмотримъ слѣдующій примѣръ: железнодорожный поѣздъ отправляется отъ станціи *A* къ станціи *B*. Требуется, пользуясь началомъ сохраненія живой силы обудить: производить локомотивъ для осуществленія этого движенія работу или не производить никакой работы.

Несомнѣнно локомотивъ производить работу, и на это тратится порядочное количество угля, стоящаго денегъ. Между тѣмъ при неосмотрительномъ примѣненіи начала сохраненія живой силы получилось бы слѣдующее: при отходѣ поѣзда со станціи *A* всѣ скорости v , были равны нулю при приходѣ на станцію *B* скорости v , опять равны нулю, получили бы

$$\sum \frac{mv_2^2}{2} - \sum \frac{mv_1^2}{2} = 0 = T, \quad \dots (319)$$

то есть оказалось бы, что работа T локомотива равна нулю. На что же требовалась затрата угля?

Несообразность такого заключенія происходитъ отъ весьма важной ошибки: мы не приняли во вниманіе силъ сопротивленія (тренія осей колесъ въ подшипникахъ, сопротивленія воздуха и проч.).

Въ дѣйствительности дѣло происходитъ такъ. При выходѣ со станціи *A* работа локомотива идетъ на увеличеніе скорости поѣзда (на увеличеніе, слѣдовательно, его живой силы), и на преодоленіе вредныхъ сопротивленій.

При дальнѣйшемъ равномерномъ движеніи поѣзда работа локомотива идетъ только на преодоленіе вредныхъ сопротивленій. Приближаясь къ станціи *B* машинистъ прекращаетъ работу локомотива, и приобретаемая имъ живая сила идетъ на преодоленіе вредныхъ сопротивленій вплоть до полнаго ея истощенія, то-есть до остановки поѣзда.

Въ примѣненіи къ разсматриваемому случаю начало сохраненія живой силы показываетъ, что работа всѣхъ дѣйствующихъ на поѣздъ силъ, то-есть и тяги локомотива и сопротивленій, считаемая за весь проѣздъ отъ станціи *A* до станціи *B* равна нулю. Сопротивленія дѣйствуютъ въ сторону противоположную движенію. Слѣдовательно, если принять работу локомотива за положительную, то работу сопротивленій приходится принять за отрицательную. Каждая изъ этихъ работъ въ отдѣльности не равна нулю; но положительная работа локомотива уничтожается отрицательною работою сопротивленій, и въ совокупности получается работа равная нулю, со-

гласно съ уравненіемъ (319) живой силы, которое само по себѣ вѣрно, но только если принимаемъ въ расчетъ всѣ силы.

Здѣсь мы не приняли въ расчетъ еще давленія поѣзда на рельсы; но это давленіе по 3-му основному закону Ньютона уничтожается давленіемъ рельсъ на колеса.

Другой примѣръ: человекъ стоитъ въ теченіи часа на мѣстѣ, при чемъ никакъ и видимой механической работы не производитъ. Отчего же онъ устаетъ? Оттого, что на напряженіе мускуловъ (главнымъ образомъ мускуловъ ногъ) безъ котораго стоять невозможно, потребна затрата энергии, заключающейся въ дѣятельности нервовъ.

ГЛАВА IV.

Начало сохраненія площадей.

§ 142. Дифференціальныя уравненія начала сохраненія площадей. Положимъ, что связи, существующія въ системѣ таковы, что всѣ точки системы могутъ двигаться по дугамъ окружностей, лежащихъ въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ оси z и имѣющихъ центры на этой оси, при чемъ взаимныя разстоянія точекъ не мѣняются. Другими словами разсматриваемъ систему способную повернуться какъ одно цѣлое около оси z . Это еще не значитъ, что система въ самомъ дѣлѣ совершаетъ такое вращеніе; мы только хотимъ сказать, что связи допускаютъ вращенія около оси z . къ такимъ системамъ относятся между прочимъ: система свободныхъ точекъ; свободная неизмѣняемая система, неизмѣняемая система вращающаяся около оси z , свободная нить, свободная жидкость и проч.

Обозначая чрезъ r радиусъ (разстояніе отъ оси z) какой-нибудь точки системы и чрезъ φ уголъ, на который повертываются радиусы всѣхъ точекъ одновременно, имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (320)$$

Отсюда:

$$\delta x = -r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi; \quad \delta y = r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi; \quad \delta z = 0$$

или, согласно съ (320):

$$\delta x = -y d\varphi; \quad \delta y = x d\varphi; \quad \delta z = 0 \dots \dots (321)$$

Вставляя эти продолженія (321) возможныхъ перемѣщеній въ основное уравненіе (282) механики:

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z \right] = \delta \pi,$$

получимъ:

$$\Sigma \left[\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) (-y d\varphi) + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) (x d\varphi) + 0 \right] = \delta \pi$$

или, благодаря произвольности величины $d\varphi$ и условия $\delta\pi \equiv 0$, получимъ:

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma (xY - yX).$$

Это есть дифференціальное уравненіе начала сохраненія площадей для системы обладающей «вращаемостью» около оси z .

Если система способна вращаться около каждой изъ осей координатъ, то мы получили бы такимъ же способомъ,

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma (xY - yX) \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma (yZ - zY) \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma (zX - xZ) \end{aligned} \right\} \dots \dots (322)$$

Таковы дифференціальныя уравненія начала сохраненія площадей для системы способной вращаться около каждой изъ осей координатъ. Къ такого рода системамъ относятся: система свободныхъ точекъ, свободная нить, свободная жидкость, свободная неизмѣняемая система, неизмѣняемая система вращающаяся около неподвижной точки и проч.

§ 143. Начало сохраненія площадей. Если вторыя части уравненій (322) равны нулю, что между прочимъ бываетъ въ отсутствіи вѣшнихъ силъ, то

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Sigma m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0$$

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0$$

Эти уравненія легко интегрируются давая интегралы:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) &= c_1 \\ \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) &= c_2 \\ \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= c_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots (323)$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 , суть постоянныя интегралы. Лѣвыя части этихъ уравненій (323) называются *моментами количества движенія* относительно осей x, y, z .

Уравнения (323) называются сокращенно *интегралами площадей*.

Согласно § 54-му величины, стоящія въ скобкахъ въ (323) помноженныя на dt суть проложенія на плоскости координаты площади, описанной въ теченіи времени dt радиусомъ-векторомъ одной изъ точекъ системы. Уравнения (323) и выражаютъ *законъ площадей*, состоящій въ слѣдующемъ: Суммы произведеній массъ на проложенія площадей, описываемыхъ радиусами-векторами точекъ системы, пропорциональны времени.

§ 144. *Неизмѣняемая плоскость*. Обозначимъ чрезъ $C dt$ сумму произведеній массъ и проложенія на некоторую плоскость P площадей, описываемыхъ радиусами-векторами точекъ системы въ теченіи времени dt . Опредѣлимъ такое положеніе плоскости P , при которомъ $C dt$ достигало бы максимальнаго значенія. Согласно съ (323), имѣемъ:

$$C dt = [c_1 \cdot \cos(P, yz) + c_2 \cdot \cos(P, xz) + c_3 \cdot \cos(P, xy)] dt$$

Обозначимъ чрезъ P вспомогательную плоскость, направленіе коей опредѣлялось бы уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} \cos(P, yz) &= \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ \cos(P, xz) &= \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \\ \cos(P, xy) &= \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \end{aligned} \right\} \quad (324)$$

Пользуясь этими формулами и извѣстною формулою опредѣляющею \cos угла между двумя прямыми, получимъ:

$$C dt = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \cdot \cos(P, P').$$

Когда P совпадаетъ съ P' , то $\cos(P, P')$ получаетъ наибольшее значеніе. Слѣдовательно наибольшее значеніе $C dt$ будетъ имѣть для плоскости, положеніе которой опредѣляется уравненіями (324). По правыя части этихъ уравненій постоянны. Слѣдовательно, эта плоскость неподвижна. Она и называется *неизмѣняемою плоскостью*.

Солнечная система какъ система свободныхъ точекъ, на которую не дѣйствуютъ внѣшнія силы, подчиняется уравненіямъ (323). Слѣдовательно, въ солнечной системѣ существуетъ (хотя и воображаемая) плоскость, остающаяся неподвижною. Существованіе неизмѣняемой плоскости открылъ Лапласъ. Для астронома, несущагося на земномъ шарѣ, совершающемъ обращеніе около солнца, вращеніе около оси, движеніе процессіи и движеніе нутаціи, чрезвычайно важно было это открытіе плоскости неподвижной или, лучше сказать участвующей только въ общемъ поступательномъ движеніи солнечной системы, упомянутомъ въ § 132-мъ.

ГЛАВА V.

Движеніе системы подѣ дѣйствіемъ мгновенныхъ силъ.

§ 145. Количество движенія. Импульсъ силы. Если сила F дѣйствуетъ въ точку m въ одномъ и томъ же направленіи, то, согласно (21):

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

Если сила дѣйствуетъ въ теченіи времени T , и скорости въ началѣ и въ концѣ этого промежутка времени суть v и v' , то

$$mv' - mv = \int_0^T F dt. \dots \dots \dots (325)$$

Произведение mv массы на скорость называется *количествомъ движенія*.

Величина $\int_0^T F dt$ называется *импульсомъ силы F за время T* . Немцы ученые называютъ импульсъ силы интеграломъ времени Zeitintegral.

Уравненіе (325) выражаетъ собою теорему: *приращеніе количества движенія за промежутокъ времени T равно импульсу силы за это время*.

Положимъ, что сила F безконечно возрастаетъ, а промежутокъ времени T безконечно уменьшается. Тогда $\int_0^T F dt$ можетъ имѣть конечный предѣлъ. Обозначимъ этотъ предѣлъ чрезъ P , тогда (325) приметъ видъ:

$$m(v' - v) = P. \dots \dots \dots (326)$$

Въ теченіи времени T скорость измѣнилась. Допустимъ, что въ теченіи этого времени она оставалась конечною (не была безконечно-большою) и обозначимъ чрезъ V наибольшее значеніе, котораго она достигала въ теченіи времени T . Тогда путь, пройденный точкою m за время T , меньше чѣмъ VT . При переходѣ къ предѣлу, для безконечно-малаго T эта величина VT обращается въ нуль. Слѣдовательно въ теченіи безконечно-малаго T точка не подвинулась: она не имѣла времени пошвинуться, а между тѣмъ скорость ея измѣнилась изъ v въ v' .

Слѣдовательно, при дѣйствіи безконечно большихъ но *миновенныхъ* силъ положеніе точки не успѣваетъ измѣниться, а измѣняется только скорость. Такая сила называется *миновенною* или *ударомъ*.

Ударъ мы опредѣляемъ какъ безконечно большую силу, дѣйствующую въ теченіи безконечно-малаго времени. Въ природѣ, хотя и не имѣются безконечно-большіхъ силъ, но существуютъ силы весьма большія, дѣйствующія въ теченіи весьма малаго времени, какъ напримѣръ, при ударѣ

молотка. Эти силы мы разсматриваемъ какъ удары и наши изслѣдованія будутъ тѣмъ точнѣе, чѣмъ больше сила и чѣмъ менѣе продолжительность ея дѣйствія.

Силу P въ уравненіи (325) называютъ силою удара. Согласно (326): *сила удара измѣряется приращеніемъ количества движенія.*

§ 146. Дифференціальныя уравненія системы, на которую дѣйствуетъ одновременно нѣсколько мгновенныхъ силъ. Обозначимъ чрезъ u, v, w продолженія на оси координатъ скорости которую имѣла точка системы только что передъ дѣйствіемъ мгновенныхъ силъ, чрезъ u', v', w' продолженія скорости по окончаніи дѣйствія мгновенныхъ силъ, чрезъ X', Y', Z продолженія мгновенной силы. Имѣемъ

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\Sigma m (u' - u) = \Sigma \int_0^T X dt = \Sigma X'.$$

Точно такія же уравненія получимъ для продолженій на оси y и z . Всего получимъ три уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m (u' - u) &= \Sigma X' \\ \Sigma m (v' - v) &= \Sigma Y' \\ \Sigma m (w' - w) &= \Sigma Z' \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (327)$$

Изъ уравненія сохранения площадей:

$$\Sigma m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \Sigma [yZ - zY]$$

получимъ:

$$\Sigma m \left(y \frac{du}{dt} - z \frac{dv}{dt} \right) = \Sigma (yZ - zY).$$

Въ предѣлѣ получимъ:

$$\Sigma m [y (w' - w) - z (v' - v)] = \Sigma (yZ' - zY').$$

Такія же уравненія получимъ для другихъ продолженій.

Всего получимъ такія три уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m [y (w' - w) - z (v' - v)] &= \Sigma (yZ' - zY') \\ \Sigma m [z (u' - u) - x (w' - w)] &= \Sigma (zX' - xZ') \\ \Sigma m [x (v' - v) - y (u' - u)] &= \Sigma (xY' - yX') \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (328)$$

ОТДѢЛЪ IV.

Механика неизмѣняемой системы.

ГЛАВА I.

Моменты инерціи неизмѣняемой системы.

§ 147. Вращеніе неизмѣняемой системы около неподвижной оси. Неизмѣняемою системою называется такая совокупность материальныхъ точекъ, въ которой разстояніе между каждаими двумя точками остается неизмѣняемымъ. Если неизмѣняемая система представляетъ собою сплошное тѣло, то она называется *абсолютно твердымъ тѣломъ*.

Если движеніе абсолютно твердаго тѣла стѣснено условіемъ, что двѣ точки его должны оставаться неподвижными, то, благодаря тому, что двумя точками опредѣляется прямая линія, и вся прямая, соединяющая эти неподвижныя точки, тоже останется неподвижною. Эта прямая называется *осью вращенія*; остальные точки тѣла могутъ двигаться, но, благодаря абсолютной твердости тѣла, каждая точка тѣла будетъ принуждена оставаться на одномъ и томъ же разстояніи отъ оси и, слѣдовательно описывать окружность, лежащую въ плоскости перпендикулярной къ оси и имѣющую центръ на оси вращенія. Такое движеніе называется *вращеніемъ около оси*. Благодаря абсолютной твердости тѣла, углы, на которые отклоняются одновременно радиусы всѣхъ точекъ, движущихся по своимъ окружностямъ, будутъ равны.

Уголъ, на который одновременно отклоняются радиусы всѣхъ точекъ, называется *угломъ поворота*. Если уголъ поворота измѣняется пропорционально времени, то вращеніе называется *равномѣрнымъ*. Не трудно видѣть, что каждая точка тѣла, вращающагося равномѣрно около оси, совершаетъ *равномѣрное движеніе* по окружности, изслѣдованное въ примѣрѣ §§ 39 и 44 и въ § 50-мъ.

Обозначимъ чрезъ ω уголъ поворота, на который отклоняются радиусы всѣхъ точекъ тѣла въ теченіи единицы времени. Этотъ уголъ называется *угломъ скорости*, равномѣрнаго вращенія около оси.

Примемъ ось вращенія за ось z дековъ и проведемъ ось x чрезъ на-

чальное положеніе одной изъ точекъ вращающагося тѣла; плоскость окружности, описываемой этою точкою, примемъ за плоскость (x, y) . Въ единицу времени радіусъ точки (x, y, z) тѣла отклоняется на уголъ ω . Въ теченіи времени t онъ отклоняется на уголъ ωt . Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\omega t) \\ y &= r \cdot \sin(\omega t) \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (329)$$

Дифференцируя эти уравненія, получимъ.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -r \omega \cdot \sin(\omega t) \\ \frac{dy}{dt} &= +r \omega \cdot \cos(\omega t) \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (330)$$

Согласно (89):

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Слѣдовательно скорость разсматриваемой точки (x, y, z) вращающагося тѣла будетъ:

$$v = \sqrt{r^2 \omega^2 [\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)]}$$

или:

$$v = \omega \cdot r \dots \dots \dots (331)$$

Здѣсь v называется *линейною скоростью* точки (x, y, z) . Итакъ:

Линейная скорость точки вращающагося тѣла равна произведенію угловой скорости на радіусъ.

§ 148. Моментъ инерціи относительно оси. Опредѣлимъ живую силу T абсолютно твердаго тѣла, равномерно вращающагося около оси. По самому опредѣленію живой силы

$$T = \sum \frac{mv^2}{2}.$$

Вставивъ сюда, вмѣсто v , его величину изъ (331), получимъ.

$$T = \sum \frac{m}{2} \omega^2 r^2 \dots \dots \dots (332)$$

ω есть величина одинаковая, какъ мы видѣли, для всѣхъ точекъ тѣла. Поэтому, вынося $\frac{\omega^2}{2}$ за знакъ суммы въ (332), получимъ:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 \dots \dots \dots (333)$$

Оказывается, что при данной угловой скорости ω живая сила равномерно вращающагося твердаго тѣла пропорциональна величинѣ $\sum mr^2$

A = моментъ инерціи тѣла относительно оси x

B = „ „ „ „ „ „ „ „ y

C = „ „ „ „ „ „ „ „ z

и замѣчая, что разстояніе точки (x, y, z) отъ оси x равно $\sqrt{y^2 + z^2}$ получимъ:

$$\left. \begin{aligned} A &= \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz = \sum m (y^2 + z^2) \\ B &= \iiint (z^2 + x^2) dx dy dz = \sum m (z^2 + x^2) \\ C &= \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = \sum m (x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \dots (336)$$

если плотность тѣла равна единицѣ, такъ что $m = ax dy dz$.

§ 149. Соотношенія между моментами инерціи относительно взаимно параллельныхъ осей. Примемъ за ось z ось вращенія и обозначимъ чрезъ

J моментъ инерціи относительно этой оси. Опредѣлимъ моментъ инерціи J' относительно оси L параллельной оси z и отстоящей отъ нея на разстояніи a .

Пусть m есть одна изъ точекъ тѣла (фиг. 47). Обозначимъ чрезъ r и r' ея разстоянія отъ осей z и L . Имѣемъ:

$$r'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos(r, a) = a^2 + r^2 - 2ax.$$

Слѣдовательно:

$$J' = \sum mr'^2 = a^2 \sum m + \sum mr^2 - 2a \sum mx.$$

Если O находится въ центрѣ инерціи, то, согласно съ (242), имѣемъ $\sum mx = 0$. Слѣдовательно:

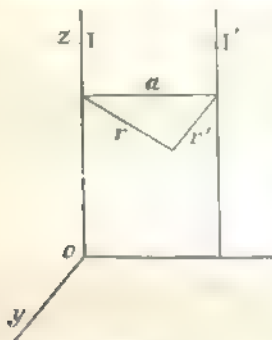
$$J' = J + a^2 \cdot M. \dots \dots \dots (337)$$

гдѣ $M = \sum m$ = массѣ всего тѣла.

Формула (337) показываетъ, что моментъ инерціи J' относительно какой-либо оси равенъ суммѣ момента инерціи J относительно оси параллельной и проходящей чрезъ центръ инерціи и произведенія $a^2 \cdot M$ массы на квадратъ разстоянія между осями. Эта теорема весьма часто примѣняется при вычисленіи моментовъ инерціи.

§ 150. Соотношенія между моментами инерціи относительно взаимно перекрѣющихся осей. Опредѣлимъ моментъ инерціи относительно оси L , проходящей чрезъ начало координатъ и составляющей съ осями координатъ углы α, β, γ (фиг. 48).

Пусть m есть одна изъ точекъ тѣла. r ея разстояніе отъ L . По тео-



Фиг. 47

решѣ о проекціяхъ имѣемъ:

$$OP = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - OP^2.$$

Слѣдовательно

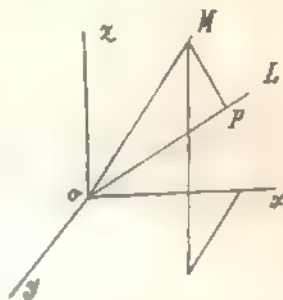
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma]^2 = x^2 (1 - \cos^2 \alpha) + \\ + y^2 (1 - \cos^2 \beta) + z^2 (1 - \cos^2 \gamma) - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - \\ - 2xy \cos \alpha \cos \beta$$

или:

$$r^2 = x^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2 (\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) + \\ + z^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta) - 2yz \cos \beta \cos \gamma - \\ - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta$$

Откуда наконецъ:

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + \\ + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2zx \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$



Фиг. 48.

Слѣдовательно:

$$J = \sum m r^2 = \cos^2 \alpha \sum m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \sum m (z^2 + x^2) + \\ + \cos^2 \gamma \sum m (x^2 + y^2) - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m yz - 2 \cos \gamma \cos \alpha \sum m zx - \\ - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m xy \dots \dots \dots (338)$$

Пользуясь обозначеніями (336) и вводя обозначенія центробѣжныхъ моментовъ D, E, F

$$\left. \begin{aligned} \sum m yz &= D \\ \sum m zx &= E \\ \sum m xy &= F \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (339)$$

и можемъ представить (338) въ видѣ:

$$J = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \gamma \cos \alpha - \\ - 2F \cos \alpha \cos \beta \dots \dots \dots (340)$$

эта формула служить для опредѣленія момента инерціи относительно оси L по даннымъ: $A, B, C, D, E, F, \alpha, \beta, \gamma$.

§ 151. Эллипсоидъ инерціи. Будемъ проводить чрезъ начало координатъ различныя оси L , опредѣлять для каждой изъ нихъ J по формулѣ (340) и представлять на каждой такой оси отъ начала координатъ векторъ $\frac{1}{J}$ — обратно-пропорціональный квадратному корню изъ мо-

мента инерции относящагося къ той оси, по которой откладывается векторъ; (\sqrt{k} есть постоянное = коэффициентъ пропорциональности). Покажемъ, что концы такихъ векторовъ окажутся лежащими на некоторомъ эллипсоидѣ, имѣющемъ центръ въ началѣ координатъ.

Дѣйствительно, обозначивъ черезъ (x, y, z) координаты конца вектора ρ , имѣемъ:

$$\rho = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{J}} \dots \dots \dots (341)$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{k} \cdot \cos \alpha}{\sqrt{J}} \\ y &= \rho \cdot \cos \beta = \frac{\sqrt{k} \cdot \cos \beta}{\sqrt{J}} \\ z &= \rho \cdot \cos \gamma = \frac{\sqrt{k} \cdot \cos \gamma}{\sqrt{J}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (342)$$

(Опредѣляя изъ (342) величины $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ и вставляя ихъ въ 340, получимъ:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = k \dots \dots (343)$$

Это уравненіе (343) 2-го порядка относительно (x, y, z) . Радиус-векторъ ρ этой поверхности опредѣляетъ и изъ формулы (341), которая показываетъ, что ρ не можетъ быть безконечно большимъ, если J не обращается въ нуль ни для одной изъ осей L . Но J не обращается въ нуль ни для одной изъ такихъ осей, если рассматриваемое тѣло не состоитъ исключительно изъ точекъ расположенныхъ по одной изъ осей L . Итакъ, поверхность (343), будучи 2-го порядка и не имѣя безконечно удаленныхъ точекъ, представляетъ собою трехосный эллипсоидъ или одинъ изъ его частныхъ видовъ. Этотъ эллипсоидъ называется *эллипсоидомъ инерціи*.

Онъ служитъ для полученія яснаго представленія о томъ, какъ распределяются моменты инерціи J , относящіяся къ осямъ, проходящимъ чрезъ данную точку.

Такъ какъ въ предыдущемъ разсужденіи положеніе начала координатъ было совершенно произвольнымъ, то для каждой точки пространства существуетъ свой эллипсоидъ инерціи по отношенію къ данному тѣлу. Разъ эллипсоидъ инерціи для данной точки O пространства мысленно построенъ по формулѣ (343), то распредѣленіе моментовъ инерціи J для осей проходящихъ чрезъ O оказывается, согласно сказанному, такимъ, что для каждой оси L проходящей чрезъ O моментъ инерціи опредѣляется по тому отрезку ρ , который отсѣкается на этой оси эллипсоидомъ инерціи, помощью формулы

$$J = \frac{k}{\rho^2} \dots \dots \dots (344)$$

§ 152. Главные оси. Главные моменты инерции. Прямая, совпадающая съ главными осями эллипсоида инерции, построеннаго для данной точки O пространства по отношенію къ данному тѣлу, называется *главными осями* для точки O по отношенію къ данному тѣлу.

Эллипсоидъ инерции, построенный для центра тяжести, называется *центральный эллипсоидомъ инерции* тѣла. Его главные оси называются *главными центральными осями*.

Моменты инерции относительно главныхъ осей для какой-нибудь точки O называются *главными моментами инерции* для этой точки.

Моменты инерции относительно главныхъ осей центрального эллипсоида инерции называются *главными центральными моментами инерции*.

Изъ Аналитической Геометрии извѣстно, что уравненіе трехоснаго эллипсоида, отнесеннаго къ его главнымъ осямъ, содержитъ только квадраты переменныхъ. Следовательно въ тѣхъ случаяхъ, когда оси координатъ взяты по главнымъ осямъ для какой-либо точки O , уравненіе эллипсоида инерции (343) принимаетъ видъ:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k (345)$$

Положимъ, что тѣло симметрично относительно плоскостей (y, z) и (x, z); тогда для каждой точки, имѣющей положительное x будетъ находиться въ тѣлѣ симметричная точка, имѣющая отрицательное x , и потому причины $\sum mxy = F$ и $\sum mzx = E$ обратятся въ нули. Точно также для каждой точки, имѣющей положительное y , найдется въ тѣлѣ симметричная ей точка, имѣющая отрицательное y , такъ что $\sum myz = D$ будетъ нуль. Но если D, E, F равны нулю, то уравненіе 343 принимаетъ видъ 345. Итакъ. Если тѣло симметрично по отношенію къ двумъ плоскостямъ, проходящимъ чрезъ данную точку O , то главные оси для точки O находятся во взаимномъ пересѣченіи этихъ плоскостей и въ направленіи ихъ съ плоскостью перпендикулярною этому взаимному пересѣченію и проходящею чрезъ O .

Согласно сказанному и формулѣ (340) заключаемъ: если A, B, C главные моменты для точки O давы, то моментъ инерции J относительно плоскости L , проходящей чрезъ O и составляющей съ главными для точки O углами α, β, γ , находится по формулѣ:

$$J = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma (346)$$

§ 153. Моменты инерции параллелепипеда относительно его осей симметрии. Согласно сказанному въ § 152 мы оси симметрии параллелепипеда являются главными центральными осями инерции. Примемъ ихъ за оси координатъ для опредѣленія, по формуламъ (336), главныхъ центральныхъ моментовъ инерции A, B, C . Пусть a, b, c , суть ребра параллеле-

пипеда. Вычислимъ входящiе въ формулы (336) интегралы:

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx dy dz = bc \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} x^2 dx = bc \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} = bc \left(\frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{24} \right) = \frac{a^3 bc}{12}$$

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2 dx dy dz = \frac{ab^3 c}{12}$$

$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} z^2 dx dy dz = \frac{abc^3}{12}$$

Слѣдовательно формулы (336) дадутъ, принимая плотность $= \delta$:

$$A = \delta \frac{abc}{12} (b^2 + c^2)$$

$$B = \delta \frac{abc}{12} (c^2 + a^2)$$

$$C = \delta \frac{abc}{12} (a^2 + b^2)$$

Или, обозначая массу δabc черезъ M :

$$\left. \begin{aligned} A &= M \frac{(b^2 + c^2)}{12} \\ B &= M \frac{(c^2 + a^2)}{12} \\ C &= M \frac{(a^2 + b^2)}{12} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (347)$$

§ 154. Центральный эллипсоидъ инерціи параллелепипеда. Вставляя опредѣленныя формулами (347) величины въ (315) получимъ слѣдующее уравненіе центральнаго эллипсоида инерціи параллелепипеда:

$$\frac{M}{12} [(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2] = k. \quad (348)$$

Произвольность коэффициента пропорциональности показываетъ, что для насъ важны не столько размѣры эллипсоида инерціи сколько его форма. Однако постараемся на этомъ примѣрѣ выяснитъ дѣло до конца.

Для соблюденія обязательной однородности формулъ замѣтимъ, что

стоящее въ скобкахъ формулы (348) выражение есть величина размѣра $[L^4]$. Поэтому, и для получения простѣйшихъ формулъ, положимъ:

$$k = \frac{M}{12} p^4 \dots \dots \dots (349)$$

гдѣ p есть некоторая линейная величина. Тогда (348) обратится въ

$$(b^2 + c^2) x^2 + (c^2 + a^2) y^2 + (a^2 + b^2) z^2 = p^4$$

или

$$\frac{x^2}{\frac{p^4}{(b^2 + c^2)}} + \frac{y^2}{\frac{p^4}{(c^2 + a^2)}} + \frac{z^2}{\frac{p^4}{(a^2 + b^2)}} = 1 \dots (350)$$

Итакъ, главные полуоси центральнаго эллипсоида инерціи суть:

$$\left. \begin{array}{l} p^2 \\ \sqrt{b^2 + c^2} \\ p^2 \\ \sqrt{c^2 + a^2} \\ p^2 \\ \sqrt{a^2 + b^2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (351)$$

Опредѣлимъ по этимъ даннымъ моментъ инерціи параллелепипеда относительно оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести и составляющей съ осями углы (α, β, γ) . По (346), и (347) имѣемъ:

$$J = \frac{M}{12} [(b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma] \dots (352)$$

Посмотримъ, какую бы мы получили величину для J , еслибы определили ее по (344).

Изъ аналитической геометріи извѣстно, что:

$$x = p \cdot \cos \alpha$$

$$y = p \cdot \cos \beta$$

$$z = p \cdot \cos \gamma$$

Подставляя эти величины въ (350) получимъ:

$$p^2 [(b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma] = p^4.$$

Вставляя сюда, вмѣсто p^4 , его величину изъ (349), получимъ:

$$[(b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma] = \frac{12k}{M} \dots \dots (353)$$

Вставляя въ (344) величину p^2 опредѣляемую изъ (353), получимъ

$$J = \frac{k \cdot M [(b^2 + c^2) \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) \cos^2 \gamma]}{12k}$$

Здѣсь произвольная величина k сокращается и получается опять формула (352).

На этомъ примѣрѣ мы хотѣли выяснитъ слѣдующее. Благодаря произвольности k эллипсоидъ инерціи даннаго тѣла, опредѣленный уравненіемъ (343) имѣетъ произвольные размѣры. Другими словами; для каждаго значенія k получается свой эллипсоидъ инерціи, но любой изъ этихъ взаимно подобныхъ эллипсоидъ въ гудится для опредѣленія J построениемъ, изложеннымъ въ концѣ § 151 и выражаемымъ формулою (344). Когда говорить объ эллипсоидѣ инерціи тѣла, то говорить о любомъ изъ взаимно подобныхъ эллипсоидовъ, соответствующихъ различнымъ значеніямъ k .

Посмотримъ теперь, какое соотношеніе имѣется между формою параллелепипеда и формою его эллипсоида инерціи. Положимъ: *наибольшій* размѣръ параллелепипеда имѣетъ въ направленіи оси *иксовъ*, *наименьшій* въ направленіи оси *зедовъ*, такъ что:

$$a > b > c.$$

Изъ (351) видно что въ такомъ случаѣ эллипсоидъ инерціи будетъ имѣть *тоже* наибольшую ось по оси *иксовъ*, наименьшую по оси *зедовъ*.

Но изъ (314) видно, что чѣмъ больше ось $2c$ эллипсоида инерціи, тѣмъ меньше относящійся къ ней моментъ инерціи. Слѣдовательно наибольшій моментъ инерціи параллелепипеда будетъ относиться къ его наименьшей оси симметріи и наименьшій моментъ инерціи относится къ его *наибольшей* оси симметріи.

Если имѣемъ кубъ, то $a = b = c$ и эллипсоидъ инерціи принимаетъ видъ сферы.

Если $b = c$, то эллипсоидъ инерціи есть [см. (347) или (351)] эллипсоидъ вращенія около оси x .

§ 155. Эллипсоидъ инерціи параллелепипеда, [относящійся къ концу его *наименьшей* оси симметріи. Предполагая $a > b > c$ опредѣлимъ моменты инерціи A' , B' , C' , относящіеся къ осямъ параллельнымъ ребрамъ параллелепипеда и проходящимъ чрезъ точку, опредѣляемую, въ системѣ координатъ предыдущаго параграфа, координатами $(0, 0, \frac{c}{2})$.

По (337) имѣемъ:

$$A' = A + \frac{c^2}{4} M$$

$$B' = B + \frac{c^2}{4} M$$

$$C' = C,$$

или, согласно (347)

$$A' = M \frac{(b^2 + c^2)}{12} + \frac{3c^2}{12} M - M \frac{(b^2 + 4c^2)}{12}$$

$$B' = M \frac{(c^2 + a^2)}{12} + \frac{3c^2}{12} M - M \frac{(4c^2 + a^2)}{12}$$

$$C' = M \frac{(a^2 + b^2)}{12}.$$

Согласно § 152-му главные оси инерции точки $(0, 0, \frac{c}{2})$ именно параллельны осям (x, y, z) . Величина главных полуосей эллипсоида инерции построенного для точки $(0, 0, \frac{c}{2})$ прямо определяется изъ (341) формулами.

$$\begin{aligned} \text{полуось параллельная оси } x & \text{ равна } \frac{\sqrt{k}}{A'} \\ \text{» » » } y & \text{ » } \frac{\sqrt{k}}{B'} \\ \text{» » » } z & \text{ » } \frac{\sqrt{k}}{C'} \end{aligned}$$

§ 156. Момент инерции прямого круглаго цилиндра относительно его геометрической оси. Обозначимъ чрезъ R радиусъ, чрезъ h высоту цилиндра. Примемъ за элементъ объема безконечно малую призму, ребра которой параллельны оси z цилиндра и основание которой ограничено дугами окружностей радиусовъ r и $r + dr$ и двумя радиусами, составляющими между собою уголъ $d\theta$. Высота такой призмы будетъ dz ; объемъ ея будетъ $r dr d\theta dz$, такъ что ея моментъ инерции относительно оси z равенъ

$$r^3 dr d\theta dz.$$

Поэтому моментъ инерции J всего цилиндра относительно его геометрической оси равенъ

$$J = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\theta dz = \frac{\pi}{2} R^4 h \quad (354)$$

Но масса цилиндра $= \pi R^2 h \delta$. Следовательно:

$$J = \frac{R^2}{2} M \quad (355)$$

ГЛАВА II.

Моменты инерции площадей.

§ 157. Момент инерции площади. Представимъ себѣ весьма тонкую пластинку ограниченную двумя взаимно параллельными плоскостями и либо цилиндрическою поверхностью, периметръ основания которой называется контуромъ пластинки. Пусть b толщина, μ плотность пластинки. Возьмемъ на одной изъ плоскихъ сторонъ элементарную площадь ds и вырѣжемъ по контуру этой площади элементъ пластинки, тоже цилиндрической, съ образующими перпендикулярными къ плоскимъ сторонамъ. Масса m такого элемента будетъ:

$$m = b \cdot \mu \cdot ds \quad (355)$$

Обозначим чрез r расстояние такого элемента отъ оси MN , лежащей въ плоскости одной изъ плоскихъ сторонъ пластинки.

Моментъ инерции всей пластинки относительно оси MN будетъ

$$J = \sum mr^2 = \sum b_m \cdot r^2 ds = b_m \sum r^2 ds \quad (357)$$

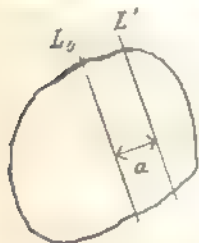
Величина b_m , какъ это вытекаетъ изъ (356), есть масса пластинки, вырѣзанной на единицу площади. Ее называютъ массою единицы площади пластинки. Если эта масса b_m равна единицу, то

$$J = \sum r^2 ds \quad (358)$$

Теоремы предыдущей главы легко распространить на моменты инерции площадей, тогда получимъ слѣдующее.

§ 158. Соотношеніе между моментами инерции площади относительно взаимно-параллельныхъ осей.

Моментъ инерции J' относительно какой-нибудь оси L' (фиг. 49) равенъ суммѣ момента инерции J_0 относительно оси параллельной но проходящей чрезъ центръ инерции пластинки и произведенія квадрата расстоянія между этими осями на площадь s всей пластинки.

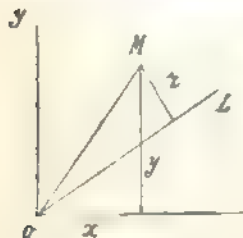


Фиг. 49.

$$J' = J_0 + a^2 \cdot s \quad (359)$$

Отсюда слѣдуетъ, что изъ всѣхъ моментовъ инерции финной площади относительно осей параллельныхъ между собою наименьшій тотъ, который берется относительно оси, проходящей чрезъ центръ инерции площади. (Здѣсь разсматриваемъ только оси, лежащія въ плоскости пластинки).

§ 159. Моменты инерции площади относительно осей, взаимно-пересекающихся. По даннымъ моментамъ инерции площади относительно двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей x и y опредѣлимъ моментъ инерции относительно оси, проходящей чрезъ ихъ пересѣченіе O (фиг. 50).



Фиг. 50

$$\sum y^2 \cdot ds = A.$$

$$\sum x^2 \cdot ds = B.$$

Примемъ обозначеніе:

$$\sum xy \cdot ds = C.$$

Найдемъ по этимъ даннымъ, чему равенъ моментъ инерции J относительно прямой L , составляющей съ осью x уголъ φ .

Пусть M будетъ какая-нибудь точка (x, y) данной площади. Обозна-

чимъ чрезъ r ея разстояние отъ L . Имѣемъ:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 - [\overline{OM} \cdot \cos (OM, L)]^2 \\ &= x^2 + y^2 - [x \cos \varphi + y \sin \varphi]^2 \\ &= x^2 \sin^2 \varphi + y^2 \cos^2 \varphi - 2xy \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \end{aligned}$$

Поэтому:

$$J = \Sigma r^2 \cdot ds = \sin^2 \varphi \Sigma x^2 \cdot ds + \cos^2 \varphi \Sigma y^2 \cdot ds - 2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \Sigma xy \, ds$$

или

$$J = A \cdot \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi - 2C \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (360)$$

Эта формула опредѣляетъ J по даннымъ φ , A , B , C . Слѣдовательно, вообще говоря, для рѣшенія задачи недостаточно знать φ , A , B , надо еще знать C . Но мы сейчасъ увидимъ, подобно тому какъ мы это видѣли въ предыдущей главѣ, что во многихъ случаяхъ $C = 0$.

§ 160. Эллипсъ инерціи. Чрезъ какую-нибудь точку O плоскости, въ которой лежитъ данная площадь, будемъ проводить оси L , опредѣлять по отношенію къ этимъ L моменты инерціи и откладывать на осяхъ L векторы p , такъ чтобы:

$$p = \sqrt{\frac{k}{J}} \quad (362)$$

Докжемъ, что геометрическое мѣсто концовъ такихъ векторовъ будетъ эллипсъ.

Имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= p \cdot \cos \varphi = \sqrt{\frac{k}{J}} \cdot \cos \varphi \\ y &= p \cdot \sin \varphi = \sqrt{\frac{k}{J}} \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (362)$$

Вставивъ опредѣляемыя изъ (362) величины $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ въ (360), получимъ:

$$Ax^2 + By^2 - 2Cxy = k. \quad (363)$$

Это уравненіе 2-го порядка. J не обращается въ нуль (слѣдовательно, согласно (361), кривая (363) не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ. Слѣдовательно это эллипсъ. Онъ называется *эллипсомъ инерціи*. Извѣстно изъ аналитической геометріи, что большая ось такого эллипса наклонена къ оси x подъ угломъ α опредѣляемымъ формулою:

$$\operatorname{tg} (2\alpha) = \frac{2C}{B-A}.$$

Если вернуть оси координатъ на уголъ α получимъ уравненіе этого эллипса въ видѣ

$$A'x_1^2 + B'y_1^2 = 1 \quad (364)$$

Эллипсы инерціи, построеннаго для точки O называются *главными эллипсами инерціи* для точки O . Если O находится въ центрѣ тяжести дан-

ной площади, то оси эллипса инерции называются *главными и центральными осями инерции*.

По данным моментам инерции A и B относительно главных осей инерции для какой либо точки O находится момент инерции J для оси, составляющей съ осью x уголъ φ , по формулѣ

$$J = A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi \dots \dots \dots (365)$$

вытекающей изъ (360) при $C = 0$.

Итакъ, законъ распределения моментовъ инерции площади относительно осей, проходящихъ чрезъ какую либо точку O в плоскости, выражается эллипсомъ инерции, именно: моменты инерции относительно какой либо оси L , проходящей чрезъ O обратно пропорциональны квадрату расстояния точки O до точки пересѣченія L съ этимъ эллипсомъ, такъ какъ изъ (361) слѣдуетъ:

$$J = \frac{k}{\rho^2} \dots \dots \dots (366)$$

Зная моменты инерции A и B относительно главныхъ центральныхъ осей, можно найти моментъ инерции относительно какой угодно оси, а именно: (по 365) опредѣлимъ моментъ инерции для оси, проходящей чрезъ центръ тяжести и параллельной данной оси, затѣмъ по (359) опредѣлимъ моментъ инерции относительно данной оси.

Перейдемъ къ примѣрамъ.

§ 161. Моментъ инерции прямолинейнаго отрезка относительно оси, проведенной чрезъ конецъ его перпендикулярно отрезку. Обозначимъ чрезъ h длину отрезка. Если плотность отрезка $= 1$, то масса его элемента $= dx$. Вычисляемъ:

$$J = \Sigma x^2 dx = \int_0^h x^2 dx = \frac{h^3}{3}.$$

Итакъ:

$$J = \frac{h^3}{3} \dots \dots \dots (367)$$

§ 162. Моментъ инерции прямолинейнаго отрезка относительно оси перпендикулярной къ нему проходящей чрезъ его центръ тяжести. По (359) получимъ:

$$J = J_0 + \frac{h^2}{4} \cdot h.$$

Сравнявая (съ 367) получимъ:

$$J_0 = \frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{4}.$$

Отсюда:

$$J_0 = \frac{h^3}{12} \dots \dots \dots (368)$$

§ 163. Моментъ инерціи прямолинейнаго отръзка относительно какой либо оси, лежащей въ плоскости отръзка. Опредѣлимъ (фиг. 51) моментъ инерціи прямолинейнаго отръзка относительно оси L составляющей съ нимъ уголъ φ и отстоящей отъ его центра тяжести на разстояніи a .

Замѣтимъ, что для такого отръзка, принятаго за ось x

$$A = \Sigma y^2 ds = 0$$

$$C = \Sigma xy ds = 0.$$

Получимъ (по 365) моментъ инерціи J , относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести подъ угломъ φ къ отръзку:

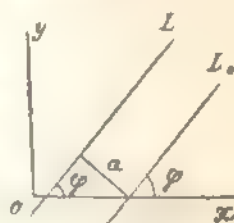
$$J_0 = B \sin^2 \varphi.$$

Или, согласно (368)

$$J_0 = \frac{h^3}{12} \sin^2 \varphi.$$

Затѣмъ (по 359) получимъ искомый

$$J = J_0 + a^2 h = \frac{h^3}{12} \sin^2 \varphi + a^2 h.$$



Фиг. 51.

§ 164. Моментъ инерціи прямоугольника относительно его основанія. Обозначимъ высоту прямоугольника чрезъ h , основаніе чрезъ b , искомый моментъ инерціи чрезъ J .

$$J = \Sigma x^2 ds = \int_0^b x^2 dx \int_0^h dy = b \int_0^b x^2 dx = \frac{bh^3}{3}.$$

Итакъ:

$$J = \frac{bh^3}{3} \quad \dots \dots \dots (369)$$

Параллелограммъ превращается въ равновелный прямоугольникъ прибавкою и отнятіемъ равныхъ треугольниковъ. Слѣдовательно и моментъ инерціи параллелограмма относительно его основанія b выражается формулою (369):

§ 165. Моментъ инерціи прямоугольника относительно оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести параллельно одной изъ его сторонъ. Обозначимъ искомый моментъ инерціи чрезъ J . По (369):

$$J_0 = J - \frac{h^3}{4} \cdot bh.$$

По (369):

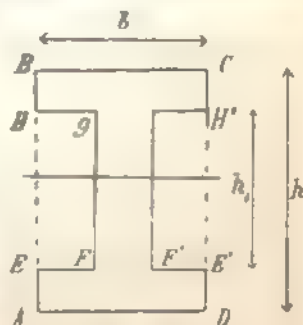
$$J_0 = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^3}{4} \cdot bh.$$

Слѣдовательно:

$$J_0 = \frac{bh^3}{12} \quad \dots \dots \dots (370)$$

§ 166. Моментъ инерціи двутавроваго сѣченія относительно оси, проходящей чрезъ его центръ тяжести параллельно его основанію.

Моментъ инерціи J_0 такого сѣченія (фиг. 52).



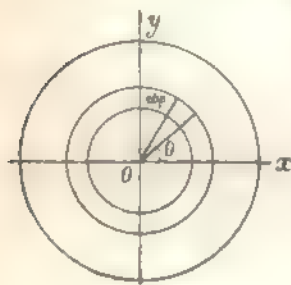
Фиг. 52.

Для выраженію моментовъ инерціи суммами, равенъ разности мо-

мента инерции прямоугольника $ABCD$ и частей $EFGH$ и $EF'G'H'$. Следовательно:

$$J_0 = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - b_1)h^3}{12}.$$

§ 167. Момент инерции круга относительно диаметра (фиг. 23). За элемент площади примем часть, ограниченную двумя бесконечно близкими окружностями и двумя радиусами, составляющими угол $d\theta$. Площадь такого элемента равна $ds = \rho d\rho \cdot d\theta$



Фиг. 23

$$\begin{aligned} J_0 &= \Sigma y^2 ds = \Sigma \rho^2 \sin^2 \theta \cdot \rho \cdot d\rho \cdot d\theta = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta \cdot d\rho \cdot d\theta = \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta. \end{aligned} \quad (371)$$

$\sin \theta$ въ последнемъ интегралѣ проходитъ всѣ тѣ значенія, какъ $\cos^2 \theta$, только въ другомъ порядкѣ. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \cdot d\theta.$$

Слѣдовательно:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta.$$

Итакъ:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot d\theta = \pi. \quad (372)$$

Слѣдовательно по (371):

$$J_0 = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (373)$$

§ 168. Значеніе момента инерции площади относительно оси въ теоріи сопротивленія матеріаловъ. Мы могли бы моменты инерции площадей разсматривать какъ частные случаи моментовъ инерции тѣлъ, а съ послѣдними мы встрѣтились при вычисленіи живой силы вращенія (§ 148). Но моменты инерции площадей играютъ, кромѣ того, весьма важную роль въ теоріи сопротивленія матеріаловъ. Изслѣдуемъ, напримѣръ, равновѣсіе бруса, задрѣзаннаго однимъ концомъ въ стѣну, имѣющаго форму парал-

деленища и сгибаемаго грузомъ P , приложеннымъ къ его свободному концу (фиг. 54). Изъ теории упругости извѣстно, что нѣкоторый слой MN останется верастянутымъ и несжатымъ. Онъ называется *нейтральнымъ слоемъ*. Слой, лежаще выше его, растягиваются при сгибаніи бруса; слой лежаще ниже сжимаются.

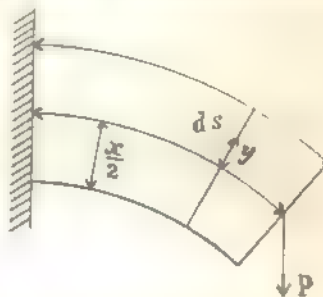
Обозначимъ внутреннюю упругую силу, сопротивляющуюся деформации бруса и отвесенную къ единицѣ площади сѣченія, чрезъ σ ; эта величина называется *напряженіемъ*. Эта величина переменная, различная для различныхъ мѣстъ поперечнаго сѣченія бруса.

Пусть ϵ есть напряжение крайнихъ волоконъ. Напряжение на поверхности отстоящаго отъ нейтральнаго слоя на разстояніи y элемента ds поперечнаго сѣченія будетъ σds ; оvoidать разгибающій статическій моментъ:

$$y\sigma ds.$$

Все поперечное сѣченіе дасть разгибающій статическій моментъ:

$$\int y\sigma ds$$



Фиг. 54.

распространенный на все поперечное сѣченіе. Грузъ P дасть наибольший (и потому опаснѣйшій въ смыслъ перелома) статическій моментъ для сѣченія, находящагося у стѣны на разстояніи h отъ конца. Этотъ сгибающій моментъ будетъ Ph . Если чрезъ σ будемъ обозначать наибольшее допускаемое для даннаго матеріала напряжение, то для него можемъ составить уравненіе, показывающее равенство сгибающаго и разгибающаго статическихъ моментовъ:

$$\int y\sigma ds = Ph \dots \dots \dots (374)$$

Это уравненіе называется *уравненіемъ прочности*. Оно служитъ для вычисленія прочныхъ размѣровъ частей построекъ и машинъ. Его обыкновенно еще преобразовываютъ, выходя изъ оправдываемаго на опытѣ предположенія, что напряжения въ элементахъ поперечнаго сѣченія пропорциональны разстояніямъ элементовъ отъ нейтральнаго слоя, то есть что

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \dots \dots \dots (375)$$

За σ_0 примемъ напряжение наиболее удаленныхъ отъ нейтральнаго слоя волоконъ, которыя наиболее деформируются. Подставивъ въ (374), за σ эту величину, опредѣляемую изъ (375), получимъ:

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 ds = Ph \dots \dots \dots (376)$$

Но $\int y^2 ds$ есть не что иное (см. § 137), какъ моментъ инерціи площади поперечнаго сѣченія относительно оси, направленной по его пере-

сѣченію съ нейтральнымъ слоемъ. Слѣдовательно уравненіе крѣпости приметъ видъ:

$$\frac{\sigma_0}{y_0} J - Ph \dots \dots \dots (377)$$

Вотъ какимъ образомъ моментъ инерціи появляется въ уравненіи крѣпости и играетъ, слѣдовательно, первостепенную роль въ теоріи сопротивленія материаловъ.

Приведемъ еще слѣдующій примѣръ, иллюстрирующій дѣло.

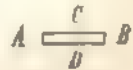
То обстоятельство, что чертежную линейку легче согнуть какъ показано на чертежѣ (фиг. 55), чѣмъ какъ показано на (фиг. 56) объясняется



Фиг. 55.



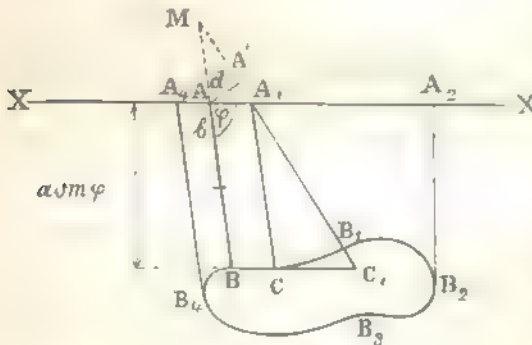
Фиг. 56.



Фиг. 57.

именно тѣмъ, что моменты инерціи поперечнаго сѣченія ленточки (фиг. 57) относительно осей AB и CD не одинаковы и потому согласно уравненію крѣпости (337), требуется больший сгибающій моментъ Ph для большаго момента инерціи J .

§ 169. **Снарядъ Амслера для опредѣленія моментовъ инерціи площадей.** Въ виду такой технической важности моментовъ инерціи площадей Амслеръ устроилъ снарядъ для непосредственнаго ихъ опредѣленія, основанный на слѣдующихъ соображеніяхъ.



Фиг. 58.

Представимъ себѣ, что стержень AB , длина котораго равна a , переходитъ изъ положенія AB въ соотвѣстное A_1B_1 , при чемъ A скользитъ по прямой X , коонецъ же B скользитъ по дугѣ BB_1 замкнутой контура $BB_1B_2B_3B_4B$. Опредѣлимъ моментъ инерціи площади AA_1BB_1 описанной стержнемъ. Эта площадь разбивается на

площади параллелограмма AA_1CB и треугольника A_1B_1C . Если

$$AA_1 = dx; \quad \angle A_1AB = \varphi; \quad \angle CA_1B_1 = d\varphi,$$

то

$$AA_1CB = a \cdot \sin \varphi \cdot dx; \quad CA_1B_1 = a^2 d\varphi$$

Моментъ инерціи параллелограмма, согласно § 164, равенъ

$$\frac{1}{3} a^3 \cdot \sin^3 \varphi \, dx.$$

Моментъ инерціи треугольника CA_1B_1 , пренебрегая безконечно малыми 2-го порядка можно считать равнымъ моменту инерціи треугольника CA_1C_1 въ которомъ CC_1 параллельна оси X . По общей формулѣ

$$\int y^2 \, ds,$$

или по формулѣ (411) моментъ инерціи такого треугольника равенъ

$$\frac{1}{4} a^4 \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Итакъ, моментъ инерціи dJ всей площади AA_1B_1B равенъ:

$$dJ = \frac{1}{3} a^3 \cdot \sin \varphi \, dx + \frac{1}{4} a^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \dots \quad (378)$$

Интегрируя это выраженіе въ предѣлахъ обхода точкою B контура $BB_1B_1B = L$, получимъ разность моментовъ инерціи площадей $A_1A_2B_1B$ и $A_1A_2B_1BB_1$ равную моменту инерціи J площади контура L . Но

$$\int_0^L \sin \varphi \cdot d\varphi = 0;$$

$$\int_0^L \sin^2 \varphi \, d\varphi = 0,$$

такъ какъ φ возвращается къ своей первоначальной величинѣ. Итакъ:

$$J = \frac{1}{3} a^3 \int_0^L \sin^3 \varphi \cdot dx = \frac{1}{3} a^3 \int_0^L \frac{3 \sin \varphi - \sin (3\varphi)}{4} dx;$$

$$J = \frac{1}{4} a^3 \int_0^L \sin \varphi \cdot dx - \frac{1}{12} a^3 \int_0^L \sin (3\varphi) \cdot dx \dots \quad (379)$$

Обозначимъ чрезъ M точку пересѣченія продолженій прямыхъ BA и B_1A_1 . Если прикрѣпимъ къ стержню AK , на разстояніи b отъ A , каточекъ на оси параллельной съ AB , то дуга dU , описанная каточкомъ при переходѣ стержня изъ AB въ A_1B_1 , равна

$$dU = (MA + b) d\varphi.$$

Получая безконечно малыми 2-го порядка, имѣемъ

$$MA_1 \, d\varphi = AA' = dx \sin \varphi.$$

Значитъ что

$$AA' = dx \cdot \sin (\varphi - d\varphi).$$

Слѣдовательно

$$dU = \sin \varphi \, dx + b \, d\varphi.$$

При обходѣ контура L концомъ B полная дуга S , описанная на бумагѣ каточкомъ, равна

$$S = \int_0^L \sin \varphi \, dx + b \int_0^L d\varphi \dots\dots\dots (380)$$

Но $\int_0^L d\varphi = 0$. Слѣдовательно:

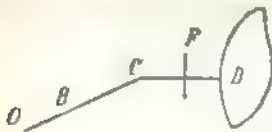
$$S = \int_0^L \sin \varphi \cdot dx$$

Итакъ, необходимый для формулы (379) интегралъ $\int_0^L \sin \varphi \cdot dx$ отсчитывается на дѣленіяхъ каточка. На снарядѣ находится еще другой каточекъ, соединенный съ первымъ зубчатыми колесами такъ, что, ось его образуетъ съ осью x уголъ 3φ . На дѣленіяхъ втораго каточка отсчитываемъ входящій въ формулу (379) интегралъ

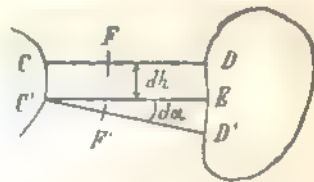
$$\int_0^L \sin (3\varphi) \, dx.$$

§ 170. Планиметръ Амслера. Здѣсь мнѣ кажется умѣстнымъ изложить, кстати, теорію другого весьма употребительнаго въ технику сваряда Амслера, служащаго для опредѣленія площадей, ограниченныхъ данными замкнутыми контурами.

Этотъ планиметръ состоитъ изъ двухъ стержней OB и CD (фиг. 59) соединенныхъ въ C шарниромъ. Въ O находится острый штифтъ, закрѣ-



Фиг. 59.



Фиг. 60.

пленный въ какой либо точкѣ чертежа. Въ D находится штифтъ, который обводится по контуру измѣряемой площади. На стержнѣ CD находится колесо F , катящееся по бумагѣ.

Представимъ себѣ стержень CD (фиг. 60), длину котораго обозначимъ чрезъ L . Заставимъ конецъ его D идти по контуру измѣряемой площади; конецъ же C поведемъ по нѣкоторой линіи CC' . Пусть стержень пришелъ изъ положенія CD въ положеніе $C'D'$. Можно разсматривать это перемѣщеніе состоящимъ изъ: 1) перемѣщенія стержня CD въ положеніе параллельное C_1E_1 и 2) поворота около C_1 на уголъ $d\alpha$.

Во время такого перемѣщенія стержень проходить площадь:

$$CC'D'D = d\omega.$$

Обозначимъ: разстояніе между CD и $C'E$ чрезъ dh , радіусъ колеса F чрезъ R , разстояніе колеса отъ C чрезъ λ , различныя положенія колеса чрезъ $F, F', F'' \dots$ такъ, что:

$$CF = C'F' = \lambda.$$

Имѣемъ:
$$d\omega = CDC'E + EC'D' = L \cdot dh + \frac{L^2 d\alpha}{2} \dots (381)$$

Обозначимъ чрезъ $d\theta$ уголъ, на который повертывается колесо F при переходѣ изъ F въ F' . Имѣемъ:

$$Rd\theta = dh + \lambda \cdot d\alpha \dots (382)$$

Исключая h изъ (381) и (382), получимъ:

$$d\omega - R \cdot L \cdot d\theta = \left(\frac{L^2}{2} - \lambda L \right) d\alpha.$$

Интегрируя, получимъ величину

$$\omega = R \cdot L \cdot \theta + \int \left(\frac{L^2}{2} - \lambda L \right) d\alpha \dots (383)$$

Элементы $d\omega$ положительны, когда они увеличиваютъ проходимую стержнемъ площадь и отрицательны когда они ее уменьшаютъ. Поэтому $\omega = \int d\omega$ представляетъ собою разность положительныхъ и отрицательныхъ элементовъ и равна измѣряемой площади контура.

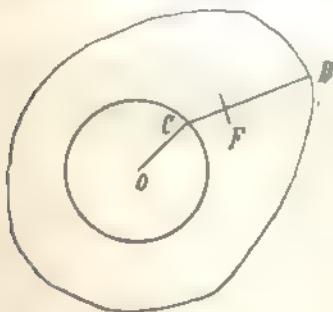
За линію CC' принимають окружность. C описываетъ окружность около острія O . Могутъ быть два случая:

1) Точка O лежитъ внутри контура (фиг. 61). Въ этомъ случаѣ α измѣняется отъ 0 до 2π ; формула (383) даетъ:

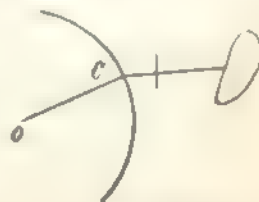
$$\omega = R \cdot L \cdot \theta + \left(\frac{L^2}{2} - \lambda L \right) 2\pi \dots (384)$$

2) Точка O лежитъ внѣ контура (фиг. 62). Въ этомъ случаѣ α измѣняется отъ нуля до нуля, и формула (383) даетъ:

$$\omega = R \cdot L \cdot \theta \dots (385)$$



Фиг. 61.



Фиг. 62.

Въ обоихъ случаяхъ площадь легко опредѣляется по R, L и по углу θ читаемому на дѣльных колесика.

ГЛАВА III.

Общія свойства моментовъ инерціи и нахожденіе ихъ облегченными способами.

§ 171. Изъ отръзковъ пропорциональныхъ моментамъ инерціи A , B , C тѣла относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей всегда можно составить треугольникъ. Дѣйствительно, изъ равенствъ:

$$\left. \begin{aligned} A &= \Sigma m (y^2 + z^2) \\ B &= \Sigma m (z^2 + x^2) \\ C &= \Sigma m (x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} (386)$$

слѣдуетъ

$$A + B - C = 2\Sigma m z^2$$

Но $\Sigma m z^2$ есть величина всегда положительная. Слѣдовательно.

$$A + B > C.$$

Точно такъ же:

$$B + C > A$$

$$C + A > B$$

при этихъ условіяхъ всегда возможенъ треугольникъ изъ отръзковъ пропорциональныхъ A , B и C (сумма двухъ сторонъ больше третьей).

§ 172. Моментъ инерціи относительно точки. Сумма произведеній массъ на квадраты ихъ разстояній отъ данной точки O называется моментомъ инерціи относительно точки O или *полярнымъ моментомъ инерціи* при полюсѣ O . Онъ, слѣдовательно, равенъ

$$\Sigma m r^2$$

гдѣ r разстояніе массъ m отъ полюса.

§ 173. Моментъ инерціи относительно плоскости. Сумма произведеній массъ на квадраты разстояній ихъ отъ плоскости называется *моментомъ инерціи относительно плоскости*.

Такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \Sigma m x^2 &= \text{моментъ инерціи относительно плоскости } (y, z) \\ \Sigma m y^2 &= \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } (z, x) \\ \Sigma m z^2 &= \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } \text{ } (x, y) \end{aligned}$$

§ 174. Сумма моментовъ инерціи относительно трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, равна двойному полярному моменту инерціи относительно этой точки. Изъ (386) слѣдуетъ:

$$A + B + C = 2\Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) (387)$$

§ 175. Моментъ инерціи J поверхности сферы относительно діаметра. Если радіусъ сферы равенъ r , то полярный моментъ относительно ея центра равенъ Σmr^2 . Отсюда, согласно § 174, слѣдуетъ:

$$J = \frac{2}{3} Mr^2.$$

§ 176. Моментъ инерціи плоской пластинки относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости равенъ суммѣ моментовъ инерціи пластинки относительно двухъ взаимно перпендикулярныхъ осей, лежащихъ въ ея плоскости. Дѣйствительно принимая ось перпендикулярную къ пластинкѣ за ось z получимъ по (386):

$$A = \Sigma my^2; \quad B = \Sigma mx^2; \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

Отсюда

$$C = A + B.$$

§ 177. Моментъ инерціи J окружности относительно діаметра. Если радіусъ окружности r , то моментъ инерціи ея относительно перпендикуляра къ ея плоскости, проходящаго чрезъ ея центръ, равенъ

$$\Sigma mr^2 = r^2 \Sigma m = Mr^2 \dots \dots \dots (388)$$

Слѣдовательно моментъ инерціи J относительно діаметра будетъ, согласно § 177, равенъ

$$J = \frac{1}{2} Mr^2 \dots \dots \dots (389)$$

§ 178. Радіусъ инерціи. Мы знаемъ, что моментъ инерціи J относительно оси равенъ Σmr^2 , гдѣ r разстояніе каждой точки тѣла отъ оси.

Величина r опредѣляемая изъ уравненія

$$\Sigma mr^2 = Mr^2 \dots \dots \dots (390)$$

и слѣдовательно равная

$$r = \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{M}} \dots \dots \dots (391)$$

называется *радіусомъ инерціи* или *иррациональнымъ радіусомъ*.

Моментъ инерціи относительно оси точки, имѣющей массу M и находящейся въ разстояніи r отъ оси равенъ

$$Mr^2.$$

Слѣдовательно, радіусъ инерціи такой точки относительно этой оси равенъ согласно (391) самому разстоянію ея r отъ оси.

Изъ § 175 слѣдуетъ, что радіусъ инерціи поверхности сферы относительно діаметра равенъ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ r , гдѣ r радіусъ сферы.

Изъ § 177 слѣдуетъ, что радіусъ инерціи окружности относительно перпендикуляра къ ея плоскости, проходящаго чрезъ ея центръ, равенъ $\frac{r}{\sqrt{2}}$, гдѣ r радіусъ окружности.

§ 179. Моментъ инерціи эллиптической пластинки. Пусть уравненіе эллипса, ограничивающаго пластинку таково

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

такъ что:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \dots \dots \dots (392)$$

Моментъ инерціи квадранта эллипса относительно оси y будетъ:

$$\int_0^a x y dx = \frac{b}{a} \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Полагая здѣсь

$$x = a \sin \varphi,$$

получимъ

$$\frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Моментъ инерціи площади всего эллипса будетъ слѣдовательно:

$$\begin{aligned} J_1 &= ba^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{ba^3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 (2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{ba^3}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2 (2\varphi) d(2\varphi) = \frac{ba^3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 (2\varphi) d(2\varphi). \end{aligned}$$

Отсюда по (372) получимъ:

$$J_1 = \pi ab \frac{a^2}{4}.$$

Но $\pi ab = M$ = массѣ пластинки. Слѣдовательно

$$J_1 = M \cdot \frac{a^2}{4} \dots \dots \dots (393)$$

Точно такъ же найдемъ моментъ инерціи J^2 эллиптической пластинки относительно оси x

$$J^2 = M \cdot \frac{b^2}{4} \dots \dots \dots (394)$$

Слѣдовательно моментъ инерціи J относительно оси перпендикулярной къ эллиптической пластинкѣ и проходящей чрезъ ея центръ будетъ:

$$J = M \cdot \frac{a^2 + b^2}{4} \dots \dots \dots (395)$$

§ 180. Моментъ инерціи трехоснаго эллипсоида относительно одной изъ осей симметріи. Пусть уравненіе эллипсоида (фиг. 63) таково:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (396)$$

Разсмотримъ слой PNQ параллельный плоскости (y, z) . Площадь его *) равна $\pi \cdot PN \cdot QN$. Но PN есть значеніе, принимаемое координатою x при $y = 0$, тогда какъ QN есть значеніе, принимаемое координатою y при $z = 0$. Слѣдовательно, согласно съ (396)

$$PN = \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad . . (397)$$

$$QN = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad . . (398)$$

Поэтому площадь слоя равна

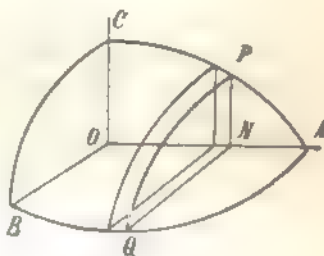
$$\frac{\pi \cdot b \cdot c}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Слѣдовательно моментъ инерціи J относительно оси x , согласно съ §§ 176 и 179 будетъ:

$$\begin{aligned} J &= \int_{-a}^{+a} \pi \cdot \frac{b \cdot c}{a^2} \cdot (a^2 - x^2) \cdot \frac{(PN^2 + QN^2)}{4} \cdot dx \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \cdot \frac{(b^2 + c^2)}{a} (a^2 - x^2) \cdot dx \\ &= \frac{4}{3} \cdot \pi abc \frac{(b^2 + c^2)}{5}. \end{aligned}$$

Но $\frac{4}{3} \pi abc = M$. Слѣдовательно:

$$J = M \frac{b^2 + c^2}{5} \quad (399)$$



Фиг. 63.

§ 181. Формулы моментовъ инерціи, особенно часто встрѣчающихся въ механикѣ. Моментъ инерціи

плоской фигуры, площади прямоугольника, имѣющаго стороны $2a$ и $2b$, относительно одной изъ осей, лежащихъ въ его плоскости, проходящей чрезъ его центръ и перпендикулярной къ сторонамъ $2a$ равенъ

$$M \frac{a^2}{3}.$$

*) Разсмотрѣвъ только одинъ октантъ эллипсоида, а разсужденія относительно всего эллипсоида.

Моментъ инерціи той же площади относительно оси перпендикулярной плоскости прямоугольника и проходящей чрезъ его центръ равенъ

$$M \frac{a^2 + b^2}{3} \dots \dots \dots (400)$$

2) Моментъ инерціи эллиптической пластинки относительно оси $2a$ равенъ

$$M \frac{b^2}{4}.$$

Моментъ инерціи той же пластинки относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости и проходящей чрезъ ея центръ равенъ.

$$M \frac{a^2 + b^2}{4} \dots \dots \dots (401)$$

3) Моментъ инерціи трехоснаго эллипсоида относительно оси $2a$ равенъ.

$$M \frac{b^2 + c^2}{5} \dots \dots \dots (402)$$

Слѣдовательно моментъ инерціи объема сферы относительно диаметра равенъ

$$M \cdot \frac{2}{5} r^2 \dots \dots \dots (403)$$

гдѣ r радіусъ сферы.

4) Моментъ инерціи прямоугольнаго параллелепипеда, имѣющаго ребра $2a$, $2b$, $2c$, относительно оси симметріи параллельной ребру $2a$ равенъ (сравни § 151):

$$M \frac{b^2 + c^2}{3}.$$

Для запоминанія этихъ формулъ замѣтимъ: моментъ инерціи этихъ тѣлъ относительно оси симметріи равенъ

$$M \cdot \frac{\text{сумма квадратовъ полуосей перпендикулярныхъ къ оси}}{3, \text{ или } 4, \text{ или } 5}.$$

Здѣсь въ знаменателѣ

3 для прямоугольнаго тѣла,

4 » эллиптическаго »

5 » эллипсоидальнаго »

§ 182. Моменты инерціи, находимые дифференцированіемъ. Моменты инерціи всякаго тѣла могутъ быть находимы при помощи формулы (386) и теоремъ §§ 149 и 150. Но иногда удобнѣе бываетъ вычислять ихъ дифференцированіемъ изъ извѣстныхъ моментовъ инерціи другихъ тѣлъ.

Зная, напримѣръ, что моментъ инерціи эллипсоида относительно оси $2a$ равенъ

$$\frac{4}{3} \pi \rho \cdot abc \frac{b^2 + c^2}{5},$$

заключаемъ, что при безконечно маломъ увеличеніи этого эллипсоида, моментъ инерціи слоя, на который эллипсоидъ увеличился равенъ

$$d \left[\frac{4}{3} \pi \cdot \rho \cdot abc \frac{b^2 + c^2}{5} \right].$$

Указанное здѣсь дифференцирование можетъ быть исполнено, если данъ законъ измѣненія эллипсоида. Если, напримѣръ, положимъ, что поверхности, ограничивающія слой, подобны и что

$$b = pa$$

$$c = qa,$$

то моментъ инерціи эллипсоида равенъ

$$\frac{4}{3} \pi \rho \cdot pq \frac{(p^2 + q^2) a^4}{5},$$

моментъ инерціи слоя равенъ

$$\frac{4}{3} \pi \rho \cdot pq (p^2 + q^2) a^4 \cdot da \dots \dots \dots (404)$$

Масса эллипсоида равна

$$\dots \dots \dots \frac{4}{3} \pi \rho \cdot pqa^3.$$

Слѣдовательно масса слоя равна

$$4\pi \rho \cdot pq \cdot a^2 da = M.$$

Поэтому опредѣленный формулою (404) моментъ инерціи слоя равенъ

$$\frac{1}{3} M (b^2 + c^2)$$

§ 183. Гиращонный эллипсоидъ. Раземотримъ эллипсоидъ, оси котораго расположены по главнымъ осямъ инерціи для точки O и полуоси которыхъ равны гиращоннымъ радіусамъ, идущимъ по этимъ осямъ. Такой эллипсоидъ называется гиращоннымъ. Пусть эти гиращонные радіусы суть α , β , γ . Они, согласно § 176, опредѣляются изъ формулъ:

$$\left. \begin{aligned} M\alpha^2 &= A \\ M\beta^2 &= B \\ M\gamma^2 &= C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (405)$$

Точно такъ же получимъ:

$$B = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

$$C = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

Но изъ равенства моментовъ инерціи относительно осей координатъ слѣдуетъ, согласно §§ 149 и 150, равенство моментовъ инерціи относительно любой оси. Итакъ, эллипсоидъ Лежандра есть *тѣло равныхъ моментовъ инерціи* по отношенію къ данному тѣлу.

§ 185. *Тѣла (или системы) равныхъ моментовъ инерціи.* Два тѣла (или двѣ системы) называются *тѣлами (или системами) равныхъ моментовъ инерціи*, если моменты инерціи относительно любой оси одной системы соответственно равны моментамъ инерціи относительно тѣхъ же осей другой системы.

Примѣръ такихъ тѣлъ мы видѣли въ § 184: данное тѣло и соответственный ему эллипсоидъ Лежандра суть тѣла равныхъ моментовъ инерціи.

Для одной и той же системы можно найти множество системъ равныхъ моментовъ инерціи.

Теорема. *Если двѣ системы имѣютъ общій центръ тяжести, одинаковую массу, одни и тѣ же главные центральные оси инерціи и соответственно равные главные центральные моменты инерціи, то онѣ суть системы равныхъ моментовъ инерціи.*

Справедливость этой теоремы вытекаетъ изъ основныхъ теоремъ §§ 149 и 150.

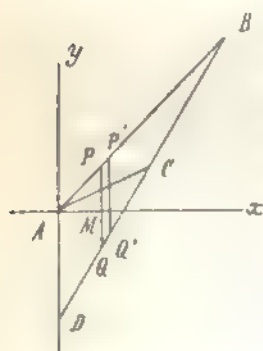
Обратная теорема. *Двѣ системы равныхъ моментовъ инерціи имѣютъ общій центръ тяжести, общія главные центральные оси инерціи, равные главные центральные моменты инерціи и равныя массы.*

Доказательство обратной теоремы. Если двѣ системы суть системы равныхъ моментовъ инерціи, то онѣ должны имѣть общія оси максимальныхъ и минимальныхъ моментовъ инерціи. Изъ всѣхъ взаимно параллельныхъ осей прямая, проходящая чрезъ центръ тяжести служить осью наименьшаго момента инерціи (см. § 149). Рассмотрим взаимно параллельныя прямыя перпендикулярныя къ прямой, соединяющей центры тяжести g и g' данныхъ системъ. Изъ этихъ прямыхъ минимальный моментъ инерціи 1-ой системы относится къ той, которая проходитъ чрезъ g минимальный моментъ инерціи 2-ой системы относится къ той, которая проходитъ чрезъ g' . Прямыя эти, согласно сказанному въ началѣ доказательства, должны совпадать, а это можетъ быть только тогда, когда совпадаютъ g и g' .

Рассмотримъ прямыя, проходящія чрезъ общій центръ тяжести. Оси минимальнаго и максимальнаго момента инерціи въ той и другой системѣ суть главные центральные моменты инерціи. Слѣдовательно, двѣ главные оси одной системы должны совпадать съ двумя такими осями другой системы. Слѣдовательно, и третья главная центральная ось совпадутъ.

Разсмотримъ, наконецъ, двѣ взаимно-параллельныя оси, находящіяся одна отъ другой на разстояніи p , и такія, что одна изъ нихъ проходитъ чрезъ общій центръ тяжести нашихъ системъ. Согласно § 149 разность относящихся къ нимъ моментовъ инерціи для одной системы равна Mp^2 , для другой $M'p^2$ и эти величины равны. Слѣдовательно и массы M и M' системъ равны между собою.

§ 196. Моментъ инерціи треугольной пластинки относительно прямой, проходящей чрезъ вершину. Пусть ABC есть данный треугольникъ. Найдемъ его моментъ инерціи относительно оси Ay (фиг. 64). Продложимъ сторону BC до пересѣченія въ D съ осью Ay и проведемъ Ax перпендикулярно Ay . Данный треугольникъ ABC можно разсматривать, какъ разность треугольниковъ ABD и ACD . Найдемъ сначала моментъ инерціи треугольника ABD . Пусть $PQP'Q'$ есть элементарная площадь, параллельная оси Ay ; пусть M есть точка пересѣченія прямыхъ PQ и Ax , обозначимъ разстояніе вершины B отъ оси Ay чрезъ β . Положимъ:



Фиг. 64.

$$AM = x$$

$$AD = q$$

$$PQP'Q' = q \frac{\beta - x}{\beta} dx.$$

Моментъ инерціи элемента $PQP'Q'$ относительно оси Ay равенъ:

$$\mu q \frac{\beta - x}{\beta} x^2 \cdot dx,$$

гдѣ μ плотность. Моментъ инерціи треугольника ABD равенъ:

$$\mu \int_0^{\beta} q \left(1 - \frac{x}{\beta}\right) x^2 \cdot dx = \frac{1}{12} \mu q \beta^3.$$

Точно такъ же, обозначая чрезъ γ разстояніе вершины C отъ оси Ay , найдемъ, что моментъ инерціи треугольника ACD равенъ:

$$\frac{1}{12} \mu q \gamma^3.$$

Слѣдовательно моментъ инерціи треугольника ABC равенъ:

$$\frac{1}{12} \mu q (\beta^3 - \gamma^3).$$

Но $\frac{1}{2} q \beta^2$ и $\frac{1}{2} q \gamma^2$ суть площади треугольниковъ ABD и ACD .

Площадь треугольника ABC равна слѣдовательно:

$$\frac{1}{2} q (\beta^2 - \gamma^2).$$

Поэтому, если M есть масса треугольника ABC , то его моментъ инерціи относительно оси Ay равенъ:

$$J = \frac{1}{6} M (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2) \dots \dots \dots (411)$$

Помѣстимъ въ срединѣ сторонъ треугольника ABC по точкѣ имѣющей массу $\frac{M}{3}$. Моментъ инерціи системы этихъ трехъ точекъ относительно оси Ay равенъ:

$$\frac{M}{3} \left[\left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 \right]$$

или:

$$\frac{1}{6} M (\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)$$

то есть, согласно (411) равенъ моменту инерціи данной треугольной пластинки ABC .

Центры тяжести системы трехъ упомянутыхъ точекъ и треугольника совпадаютъ. Обозначимъ ихъ общий центръ тяжести чрезъ O . Проведемъ Oy' параллельно Oy . Согласно § 145 моменты инерціи пластинки и системы трехъ упомянутыхъ точекъ относительно Oy' равны между собою. Точно также будутъ равны моменты инерціи треугольника и системы трехъ точекъ относительно оси Ox перпендикулярной къ Oy' . Слѣдовательно, согласно § 176, будутъ равны между собою и моменты инерціи трехъ точекъ и треугольника относительно оси Oz' перпендикулярной къ осямъ Ox' и Oy' .

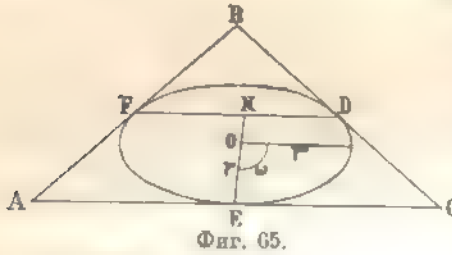
Одна изъ главныхъ центральныхъ осей перпендикулярна плоскости треугольника, и она общая для него и для трехъ точекъ; это и будетъ Oz' . Двѣ другія центральныя главныя оси лежатъ въ плоскости треугольника и моменты инерціи относительно нихъ суть наибольшій и наименьшій. Поэтому эти оси тоже общія для треугольника и для системы трехъ точекъ.

Итакъ главные центральные моменты инерціи системы трехъ точекъ соответственно равны главнымъ центральнымъ моментамъ инерціи треугольной пластинки и относятся къ тѣмъ же главнымъ центральнымъ осямъ.

Слѣдовательно, согласно § 185: *треугольная плоская пластинка и система трехъ точекъ, размѣщенныхъ въ срединахъ сторонъ этого треугольника и имѣющихъ каждая массу равную $\frac{1}{3}$ массы пластинки, суть системы равныхъ моментовъ инерціи.*

§ 187. Центральный эллипсъ инерціи треугольной пластинки. Представимъ себѣ эллипсъ, который касался бы сторонъ AB и BC треугольника

ABC въ ихъ серединахъ F и D ; тогда, по теоремѣ *Carnot*, онъ коснется стороны AC въ ея серединѣ E . Но DF параллельна касательной CA , имѣющей точку касанія въ E . Поэтому прямая, соединяющая E съ серединою N прямой DF , проходить чрезъ центръ O эллипса. Слѣдовательно, центръ O эллипса совпадаетъ съ центромъ тяжести треугольника.



Докажемъ, что этотъ эллипсъ и есть центральный эллипсъ инерции треугольной пластинки. Положимъ:

$$OE = r$$

r' = половинѣ диаметра сопряженного съ r

ω = уголъ составляемый r и r' .

Слѣдовательно:

$$ON = \frac{1}{2} r \dots \dots \dots (412)$$

Уравненіе эллипса отнесеннаго къ сопряженнымъ осямъ r и r' будетъ:

$$\frac{ON^2}{r^2} + \frac{FN^2}{r'^2} = 1$$

или, согласно (412):

$$\frac{r^2}{4r^2} + \frac{FN^2}{r'^2} = 1.$$

Отсюда:

$$FN^2 = \frac{3}{4} r^2 \dots \dots \dots (413)$$

Но моментъ инерціи треугольника относительно оси OE равенъ моменту инерціи трехъ точекъ E , F , D , изъ коихъ каждая имѣетъ массу $\frac{1}{3} M$. Этотъ моментъ инерціи равенъ

$$\frac{2}{3} M \cdot [FN \cdot \sin \omega]^2$$

или, благодаря (413):

$$\frac{2}{3} M \cdot \frac{3}{4} r^2 \cdot \sin^2 \omega \dots \dots \dots (414)$$

Но по теоремѣ Аполлонія:

$$rr' \cdot \sin \omega = ab$$

гдѣ a и b суть главные полуоси эллипса; площадь эллипса равна:

$$\pi ab = \pi \cdot rr' \cdot \sin \omega = \Delta.$$

Слѣдовательно, величина, обозначенная номеромъ (414), равна:

$$\frac{M}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{\pi^2 r^2} = \text{моменту инерции относительно } OE.$$

Слѣдовательно моменты инерции относительно осей OE , OF , OD обратно пропорціональны квадратамъ: OE^2 , OF^2 , OD^2 . Если изъ всѣхъ взаимно подобныхъ эллипсовъ инерции выберемъ такой, который проходить чрезъ точки E , F , D (а это, согласно сказанному, возможно) и слѣдовательно еще чрезъ три противоположные имъ конца диаметровъ вписаннаго эллипса, то замѣтимъ, что два эллипса только тогда могутъ имѣть 6 общихъ точекъ, когда они совпадаютъ, и заключимъ, что вписанный нами эллипсъ и есть центральный эллипсъ инерции треугольной пластинки.

§ 188. Эллипсоидъ инерции треугольной пластинки. Перпендикуляръ къ плоскости пластинки, проведенный чрезъ ее центръ тяжести, есть одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерции пластинки, такъ какъ плоскость ее есть главная центральная плоскость. Слѣдовательно, вписанный эллипсъ предыдущаго параграфа есть одно изъ главныхъ сѣченій эллипсоида инерции пластинки. Поэтому, если $2a$ и $2b$ суть главные оси этого сѣченія, то, согласно § 176, третья ось $2c$ эллипсоида инерции опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

и уравненіе эллипсоида инерции, отнесенное къ его главнымъ осямъ, будетъ:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

§ 189. Аффино-преобразование. Если увеличимъ, или уменьшимъ въ одинаковое число разъ разстоянія всѣхъ точекъ системы отъ данной плоскости, то получимъ другую систему точекъ, которая называется аффино-преобразованиемъ первой системы относительно данной плоскости.

Теорема. Аффино-преобразованія двухъ системъ равныхъ моментовъ инерции суть системы тоже равныхъ моментовъ инерции. Если начало координатъ находится въ общемъ центрѣ тяжести двухъ данныхъ системъ равныхъ моментовъ инерции и если условимся обозначать значками величины, относящаяся къ одной изъ этихъ системъ, то:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m &= \Sigma m'; \Sigma mx = 0; \Sigma m'x' = 0 \dots \dots \dots \\ \Sigma mx^2 &= \Sigma m'x'^2; \Sigma mxy = \Sigma m'x'y' \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (415)$$

Послѣ аффино-преобразованія этихъ системъ въ отношеніи 1 : n относительно плоскости (x, y) . Точка (x, y, z) перейдетъ въ точку (x, y, nz) ; точка (x', y', z') перейдетъ въ точку (x', y', nz') ; массы m и m' перейдутъ (вслѣдствіе удлиненія элементовъ) въ массы nm и nm' . Ясно, что

тождества (415) послѣ такого преобразованія останутся тождествами, и потому новыя системы будутъ опять системами равныхъ моментовъ инерціи.

§ 190. Эллипсъ инерціи аффинно-преобразованной системы есть аффинно-преобразованіе эллипса инерціи данной системы. Произведемъ такое аффинно-преобразованіе относительно оси X данной плоской системы, при которомъ точка (x, y) переходитъ въ точку (x, y') , гдѣ $y' = ny$; масса m переходитъ въ массу m' , гдѣ $m' = nm$.

Получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \sum mx^2 &= \frac{1}{n} \sum m'x^2; & \sum my^2 &= \frac{1}{n^3} \sum m'y'^2 \\ \sum mxy &= \frac{1}{n^2} \sum m'xy' \end{aligned} \right\} \dots (416)$$

Эллипсъ инерціи данной системы выражается уравненіемъ

$$X \cdot \sum my^2 - 2XY \sum mxy + Y \cdot \sum mx^2 = kM \dots (417)$$

Эллипсъ инерціи преобразованной системы выражается уравненіемъ:

$$X' \cdot \sum m'y'^2 - 2X'Y' \sum m'xy' + Y' \cdot \sum m'x'^2 = k'M' \dots (418)$$

Произведя надъ (417) аффинно-преобразованіе, выражаемое равенствами

$$X = X', \quad Y = nY',$$

и выбирая k' такъ, чтобы $k = n^3 k'$, получимъ (418). Итакъ: эллипсъ инерціи аффинно-преобразованной системы есть аффинно-преобразованіе эллипса инерціи данной системы.

§ 191. Центральный эллипсъ инерціи параллелограмма. Теорема предыдущаго параграфа позволяетъ опредѣлять видъ эллипсовъ инерціи менѣе правильныхъ фигуръ по известному виду эллипса инерціи фигуры болѣе правильной. Напримеръ: эллипсъ инерціи квадрата есть вписанный въ него кругъ. Произведемъ два подрядъ аффинно-преобразованія, первое относительно стороны квадрата, переводящее его въ прямоугольникъ, второе относительно диагонали этого прямоугольника, переводящее его въ параллелограммъ. При этомъ круговой эллипсъ инерціи квадрата обратится въ эллипсъ, вписанный въ параллелограммъ и касающийся его сторонъ въ ихъ серединахъ. Поэтому, согласно § 190, получимъ, что: Эллипсъ инерціи параллелограмма есть эллипсъ вписанный въ параллелограммъ и касающийся его сторонъ въ ихъ серединахъ.

§ 192. Найти систему 4-хъ точекъ, которая была бы системою равныхъ моментовъ инерціи по отношенію данной системы. Пользуясь аффинно-преобразованіемъ можно доказать (см. Bouth: Die Dynamik der Systeme

starrer Körper. t. I, § 44), что решение задачи, обозначенной въ заглавіи этого параграфа, всегда возможно и что существуетъ безконечное множество ея рѣшеній для каждой данной системы. Требуя болѣе симметричнаго расположенія искомымъ точкамъ, мы упростимъ задачу и получимъ одно рѣшеніе.

Найдемъ главные центральные моменты слѣдующихъ четырехъ точекъ (фиг. 66): $(0, b, c)$; $(0, -b, c)$; $(a, 0, -c)$; $(-a, 0, -c)$, предполагая, что масса каждой точки равна m .

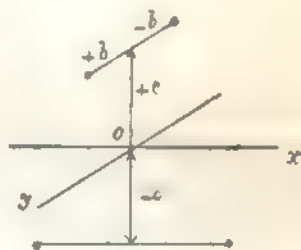
Не трудно убѣдиться, что для такой системы:

$$\sum m x = 0$$

$$\sum m y = 0$$

$$\sum m z = 0$$

я что, слѣдовательно, центръ тяжести системы находится въ началѣ координатъ. Не трудно видѣть также, что плоскости (y, z) и (z, x) суть плоскости симметріи системы. Слѣдовательно оси координатъ суть главные центральные оси инерціи. Моменты инерціи относительно этихъ осей будутъ:



Фиг. 66.

$$A = \sum m (y^2 + z^2) = m (b^2 + c^2) + m (b^2 + c^2) + mc^2 + mc^2$$

$$B = \sum m (z^2 + x^2) = mc^2 + mc^2 + m (a^2 + c^2) + m (a^2 + c^2)$$

$$C = \sum m (x^2 + y^2) = mb^2 + mb^2 + ma^2 + ma^2$$

или:

$$\left. \begin{aligned} A &= 2m (b^2 + 2c^2) \\ B &= 2m (a^2 + 2c^2) \\ C &= 2m (a^2 + b^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (419)$$

Если главные центральные моменты инерціи какой нибудь данной системы точекъ равны A' , B' , C' , то для того, чтобы выбранная нами система 4-хъ точекъ имѣла такіе же моменты инерціи, необходимо и достаточно, чтобы, согласно (419).

$$\left. \begin{aligned} b^2 + 2c^2 &= \frac{A'}{2m} \\ a^2 + 2c^2 &= \frac{B'}{2m} \\ a^2 + b^2 &= \frac{C'}{2m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (420)$$

Называя массу данной системы M , полагая $M = 4m$ и определяя a^2, b^2, c^2 изъ (420), получимъ:

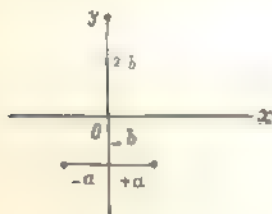
$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{M}(A' + C - B') \\ b^2 &= \frac{1}{M}(C + B' - A') \\ 2c^2 &= \frac{1}{M}(B' + A' - C') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (421)$$

Правая части этихъ уравненій всегда положительны, потому что моменты инерціи всякой системы таковы, что изъ нихъ можно составить треугольникъ (см. § 171) и слѣдовательно величины, стоящія въ скобкахъ правыхъ частей уравненій (421), всегда положительны. Поэтому всегда можно подыскать такія a, b, c , которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (421) если A', B', C' суть моменты инерціи.

Итакъ, всегда можно расположить по указанному способу четыре точки такъ, чтобы главные центральные моменты инерціи системы этихъ точекъ были равны главнымъ центральнымъ моментамъ инерціи данной системы. Но въ такомъ случаѣ, согласно § 185, моментъ инерціи системы четырехъ точекъ относительно какой бы то ни было оси будетъ равенъ моменту инерціи, относительно той же оси, данной системы.

Найденнымъ способомъ, указаннымъ въ настоящемъ параграфѣ, по формуламъ (421) четыре точки можно назвать точками, характеризующими моменты инерціи данной системы, въ которой главные центральные моменты инерціи равны A', B', C' .

§ 193. Найти систему трехъ точекъ, характеризующую моменты инерціи данной площади. Это значитъ найти такую систему трехъ точекъ, моментъ инерціи которой относительно любой оси былъ бы равенъ моменту инерціи данной системы относительно той же оси.



Фиг. 67.

Задача эта тоже допускаетъ множество рѣшеній, но мы, требуя нѣкоторой симметріи, найдемъ одно рѣшеніе.

Опредѣлимъ главные центральные моменты инерціи системы, состоящей изъ точекъ $(a, -b)$; $(-a, b)$; $(0, 2b)$ фиг. 67). Центръ тяжести ея находится въ началѣ координатъ и ось y есть ось симметріи. Слѣдовательно, оси координатъ суть главные центральные оси. Опредѣляемъ (полагая, что масса каждой точки — m):

$$A = \Sigma my^2 = 6mb^2$$

$$B = \Sigma mx^2 = 2ma^2$$

Если главные центральные моменты инерции данной площади суть A' , B' , то a и b определяются из уравнений:

$$a^2 = \frac{B'}{2m}$$

$$b^2 = \frac{A'}{6m}.$$

Если масса данной площади — M и $M = 3m$, то:

$$a^2 = \frac{3}{2} \frac{B'}{M}$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \frac{A'}{M}$$

§ 194. Условие, чтобы данная прямая была одною из главных осей для какой-нибудь точки. Мы видели, что для каждой точки пространства существует, для данной системы, свой эллипсоид инерции и свои главные оси. Решим следующую задачу: дана неизменяемая система материальных точек и дана прямая. Определить ту точку этой прямой, для которой она есть одна из главных осей инерции и если такая точка существует, определять две другие относящиеся к ней главные оси инерции.

Примем данную прямую за ось z и какую-нибудь ее точку за начало прямоугольных координат. Пусть C' есть та точка, лежащая на оси z , для которой ось z есть одна из главных осей инерции. Положим, что две другие главные оси для точки C' суть $C'x'$ и $C'y'$. Обозначим через h расстояние OC и через θ угол между $C'x'$ и Cx . Формулы преобразования координат будут таковы:

$$x' = x \cdot \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

$$z' = z - h.$$

Следовательно, если Cx , Cy , Cz суть главные оси инерции, то

$$\begin{aligned} \Sigma m x' z' &= \cos \theta \cdot \Sigma m x z + \sin \theta \cdot \Sigma m y z - \\ &- h (\cos \theta \cdot \Sigma m x + \sin \theta \cdot \Sigma m y) = 0. \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \Sigma m y' z' &= -\sin \theta \cdot \Sigma m x z + \cos \theta \cdot \Sigma m y z - \\ &- h (-\sin \theta \cdot \Sigma m x + \cos \theta \cdot \Sigma m y) = 0. \end{aligned} \quad (123)$$

$$\Sigma m x' y' = \Sigma m (y^2 - x^2) \frac{\sin (2\theta)}{2} + \Sigma m x y \cos (2\theta) = 0. \quad (124)$$

Из (124) следует:

$$\tan (2\theta) = \frac{2 \Sigma m x y}{\Sigma m (x^2 - y^2)} = \frac{2F}{B - A}. \quad (125)$$

Исключая h из уравнений (422) и (423), получимъ

$$\frac{\sum mxz}{\sum mx} = \frac{\sum myz}{\sum my} \dots \dots \dots (426)$$

Уравнение (426) и представляет собою условие, выполнение котораго необходимо для того, чтобы ось z могла быть одною изъ главныхъ осей инерции для какой либо лежащей на ней точки.

Изъ (422) и (426) имѣемъ:

$$h = \frac{\sum mxz}{\sum mx} - \frac{\sum myz}{\sum my} \dots \dots \dots (427)$$

Эта формула (427) опредѣляетъ положеніе на оси z искомой точки. Формула (425) опредѣляетъ положеніе двухъ другихъ главныхъ осей.

§ 195. Слѣдствія, вытекающія изъ уравненій предыдущаго параграфа.

1) Если:

$$\begin{aligned} \sum mxz &= 0 \\ \sum myz &= 0 \end{aligned} \quad | \quad \dots \dots \dots (428)$$

то уравненія (427) удовлетворяются при $h = 0$. Слѣдовательно, уравненія (428) представляют собою условия достаточныя для того, чтобы ось z была одною изъ главныхъ осей инерции для начала координатъ.

2) Если система представляет собою плоскую пластинку и ось z перпендикулярна къ ней, проходя чрезъ какую бы то ни было точку ея плоскости, то условия (428) соблюдены. Слѣдовательно одна изъ главныхъ осей пластинки для какой либо точки O ея плоскости есть перпендикуляръ, возстановленный къ этой плоскости изъ точки O .

3) Уравненіе (425) не содержитъ величины h . Слѣдовательно, если ось z служитъ одною изъ главныхъ осей инерціи для нѣсколькихъ лежащихъ на ней точекъ, то остальные главные оси инерціи этихъ точекъ соответственно параллельны другъ другу. Въ этомъ случаѣ уравненіе (427) должно давать нѣсколько рѣшеній для h . Но такъ какъ h входитъ въ (427) только въ первой степени, то такое множество рѣшеній можетъ существовать только при выполненіи условий.

$$\sum mx = 0; \quad \sum my = \sum mxz = 0; \quad \sum myz = 0,$$

то есть, ось z должна проходить чрезъ центръ тяжести и быть 'главною осью уже для каждой изъ лежащихъ на ней точекъ, такъ какъ начало координатъ O можетъ быть взято на ней произвольно (въ любой ея точкѣ).

4) Если за оси x, y, z приняты главные центральныя оси инерціи, то (422) и (423) удовлетворяются всякими значеніями h . Слѣдовательно *главная центральная ось инерціи служитъ главною осью инерціи для каждой изъ лежащихъ на ней точекъ.*

§ 196. Распределение главных осей инерции в плоскости. Решимъ задачу:

По данному положению главных центральных осей ox , oy , oz и по даннымъ величинамъ главных центральных моментовъ инерции найти положение главных осей и величины главных моментовъ инерции для какой либо точки P , лежащей въ плоскости (x, y) . Такимъ образомъ примемъ обозначение: A , B моменты инерции относительно осей x и y ; M масса системы. Положимъ $A > B$. Пусть H и S двѣ точки лежащія на оси x по обѣ стороны O такъ что:

$$OH = OS = \sqrt{\frac{A-B}{M}} \dots \dots \dots (429)$$

Эти точки называются *фокусами инерции* плоскости (x, y) .

Такъ какъ фокусы инерции лежатъ на одной изъ главныхъ центральныхъ осей, то, согласно (§ 3) предыдущаго параграфа, главные оси для точекъ H и S параллельны главнымъ центральнымъ осямъ. Моменты инерции (относительно) этихъ главныхъ осей для точекъ H и S , которыя лежатъ въ плоскости (x, y) соответственно равны

$$A + M \cdot OS^2 \dots \dots \dots (430)$$

Но согласно (429) второй изъ этихъ моментовъ, опредѣляемый формулою (430) тоже равенъ A . Следовательно, оси лежащихъ въ плоскости (x, y) главныхъ сѣченій эллипсоидовъ инерции построенныхъ для H и S равны между собою. Поэтому каждое такое сѣчение есть кругъ. Итакъ всякая прямая, проходящая въ плоскости (x, y) чрезъ фокусъ инерции этой плоскости, есть главная ось для этого фокуса, и моменты инерции относительно всякой такой прямой равенъ A .

Одна изъ главныхъ осей для точки P , лежащей въ плоскости (x, y) , есть перпендикуляръ къ этой плоскости. Действительно если p и q суть координаты точки P , то такой перпендикуляръ будетъ главною осью при следующихъ

$$\sum m (x - p) z = 0$$

$$\sum m (y - q) z = 0.$$

Эти условія эти выполняются, такъ какъ начало координатъ въ центрѣ тяжести и оси координатъ суть главные центральные оси инерции.

Положение двухъ другихъ, лежащихъ въ плоскости (x, y) , главныхъ осей для P опредѣляется при помощи слѣдующихъ соображеній. Соединимъ P съ фокусами H и S прямыми PH и PS . Моменты инерции относительно этихъ осей PH и PS равны между собою и равны порознь A по известному выше свойству фокусовъ инерции. Но оси построеннаго для P эллипса инерции дѣлятъ пополамъ смежные углы, образованные этими диаметрами. Следовательно искомыя главные оси для P суть

биссектрисы смежных углов, составленных прямыми PH и PS . Это приводит нас к следующему заключению: *нормаль и касательная в любой точке P любого эллипса или гиперболы, имеющей фокусы в H и S и суть главные оси инерции для точки P^* .*

Итак, для нахождения главных осей инерции для точки P , лежащей в главной центральной плоскости (x, y) поступаем следующим образом (фиг. 68). Откладываем на оси x наибольшего момента по обе стороны центра тяжести данны

фокусы инерции H и S . Проводим эллипс, проходящий чрез P и имеющий фокусы в H и S . Нормаль и касательная в P к этому эллипсу и будут главными осями для точки P . Третья главная ось перпендикулярна к этим двум.

Нам еще остается определить моменты инерции относительно найденных главных осей.

Проведем произвольную прямую KL чрез центр тяжести O (фиг. 68). Положим, что она составляет с осью x угол θ . Опустим на эту прямую перпендикуляры SK и HL . Момент инерции J , относительно KL будет

$$J = A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta = A - (A - B) \sin^2 \theta$$

или согласно (429):

$$J_0 = A - M \cdot (OS \sin \theta)^2 = A - M \cdot SK^2$$

Проведем чрез P прямую PT параллельную к KL и опустим на нее перпендикуляры SU и HX . Момент инерции относительно PT будет:

$$J_0 + M \cdot KY^2 = A + M(KU - SK)(KY + SK) = A + SY \cdot HXM \quad (431)$$

Пусть PT будет касательная, PP' нормаль того эллипса, который, имея фокусы в H и S , проходит чрез P , уравнение его будет $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда:

$$a^2 - b^2 = OS^2 = \frac{A - B}{M} \dots \dots \dots (432)$$

Поэтому

$$A + SY \cdot HXM = A + Mb^2 \dots \dots \dots (433)$$

ибо произведение $SY \cdot HX$ есть величина постоянная равная b . На основании (432) имеем:

$$A + Mb^2 = B + Ma^2 = B + M \left(\frac{SH + HP}{2} \right)^2.$$

*) Отсюда выводится и название „фокусы инерции“.

Пользуясь гиперболою в прямую PP' , найдемъ что моментъ инерціи около PP равенъ $B + M \frac{SP^2 - HP^2}{2}$. Итакъ, искомые главные моменты опредѣляются формулою:

$$B + M \cdot \left(\frac{SP \pm HP}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (434)$$

§ 197. Распределение главных осей инерціи въ пространствѣ.

Теорема: Сумма момента инерціи C' относительно плоскости, проходящей черезъ данную точку и момента инерціи C относительно нормали къ той плоскости въ той же точкѣ равна моменту инерціи Σmr^2 относительно этой точки.

Доказательство: Изъ условій:

$$C = \Sigma m (x^2 + y^2)$$

$$C' = \Sigma m z^2$$

слѣдуетъ

$$C + C' = \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2)$$

или

$$C + C' = \Sigma m r^2 \dots \dots (435)$$

что и требовалось доказать.

Пусть A, B, C суть главные центральные моменты инерціи данной системы, массу которой примемъ за единицу.

Построимъ поверхность 2-го порядка однофокусную съ центральнымъ гравитационнымъ эллипсоидомъ. Положимъ, что полуоси a, b, c построенной поверхности опредѣляются уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= A + \lambda \\ b^2 &= B + \lambda \\ c^2 &= C + \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (436)$$

Найдемъ моментъ инерціи данной системы относительно плоскости касательной къ построенной поверхности. Пусть α, β, γ , суть углы составляемые нормалью этой плоскости съ осями координатъ.

Моментъ инерціи системы относительно центра тяжести (начала координатъ) согласно § 174 равенъ $\frac{1}{2} (A + B + C)$. Моментъ инерціи относительно нормали, составляющей съ осями координатъ углы α, β, γ , согласно (436) равенъ $A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$. Слѣдовательно, по теоремѣ, доказанной въ началѣ настоящаго параграфа, моментъ инерціи относительно плоскости, параллельной разсматриваемой касательной плоскости, но проходящей чрезъ O , равенъ

$$\frac{1}{2} (A + B + C) - (A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma) \dots (437)$$

Моментъ инерціи относительно самой касательной плоскости получится, согласно (437), если къ (437) придадимъ квадратъ разстоянія между па-

параллельными плоскостями, равный

$$(A + \lambda) \cos^2 \alpha + (B + \lambda) \cos^2 \beta + (C + \lambda) \cos^2 \gamma.$$

Следовательно искомый момент инерции относительно касательной плоскости равен:

$$\frac{1}{2} (A + B + C) + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad (438)$$

или, на основании (436):

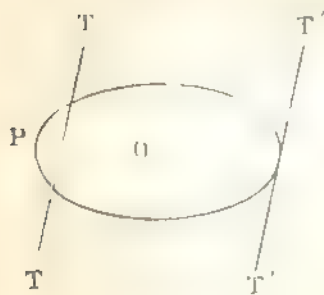
$$\frac{1}{2} (B + C - A) + a^2 + \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad (439)$$

Итак: моменты инерции данной системы относительно плоскостей касательных къ поверхности конфокальной съ центральнымъ тирационнымъ эллипсоидомъ, равны между собой.

Извѣстно, что чрезъ каждую точку пространства проходятъ двѣ поверхности конфокальныя съ эллипсоидомъ, на которомъ лежитъ эт. точка, такъ что чрезъ эту точку проходятъ три конфокальныя поверхности трехосный эллипсоидъ, двуполый гиперболоидъ и однополый гиперболоидъ.

Докажемъ, что плоскости, касательныя въ одной точкѣ къ тремъ проходящимъ чрезъ нее конфокальнымъ поверхностямъ, одна изъ коихъ есть эллипсоидъ конфокальный съ центральнымъ тирационнымъ эллипсоидомъ, суть три главные плоскости инерции для данной точки и что, следовательно, три прямыя касательныя къ взаимнымъ пересечениямъ этихъ плоскостей суть главные оси инерции для данной точки.

Доказательство. Всякая касательная плоскость TT' (фиг. 69) проведенная къ эллипсоиду параллельно любой касательной плоскости TT' проходящей чрезъ точку P , дальше отстоитъ отъ центра, чѣмъ плоскость TT . Поэтому моментъ инерции относительно плоскости TT' менѣ момента инерции относительно плоскости TT . Но согласно сказанному въ поводу формулы (439) моментъ инерции относительно TT' равенъ моменту инерции относительно касательной плоскости проведенной чрезъ P . Следовательно моментъ инерции относительно плоскости, проведенной чрезъ P касательно къ проходящему чрезъ P гомофокальному эллипсоиду больше моментовъ относительно другихъ плоскостей,



Фиг. 69.

проходящихъ чрезъ P . Следовательно, эта касательная плоскость есть одна изъ главныхъ плоскостей инерции, именно та, которая соответствуетъ наибольшему моменту инерции. Точно также можно доказать, что проходящая чрезъ P плоскость касательная къ двуполому гиперболоиду есть главная плоскость соответствующая наименьшему мо-

менту инерции. Поэтому, благодаря взаимной ортогональности гомофокальных поверхностей, плоскость касательная одному гиперболоиду будет тоже одною из главных плоскостей инерции для точки P , именно тою, которая соответствует среднему главному моменту. Пересечения этих трех плоскостей будут главными осями инерции для точки P . Что и требовалось доказать.

Найдем величины этих главных моментов инерции.

Пользуясь сказаннымъ въ §§ 174 и 149 не трудно доказать, что полярный момент инерции относительно точки P равенъ:

$$\frac{1}{2} (A + B + C) + \overline{OP}^2 \dots \dots \dots (440)$$

если $M = 1$.

Изъ (435) и (437) слѣдуетъ, что главные моменты инерции для точки P будутъ:

$$\left. \begin{aligned} OP^2 - \lambda_1 &= J_1 \\ OP^2 - \lambda_2 &= J_2 \\ OP^2 - \lambda_3 &= J_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (441)$$

гдѣ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ суть параметры конфокальныхъ поверхностей. Замѣтимъ, что общій видъ уравненій этихъ поверхностей таковъ:

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} + \frac{z^2}{C + \lambda} = 1 \quad (442)$$

§ 198. Поверхность равныхъ главныхъ моментовъ инерции. Посмотримъ, какъ расположены въ пространствѣ тѣ точки, для которыхъ одинъ изъ главныхъ моментовъ инерции имѣетъ одну и ту же величину J .

Для этого достаточно положить J постояннымъ и, опредѣливъ λ изъ уравненія

$$r^2 - \lambda = J$$

представляющаго собою одно изъ уравненій системы (441), подставить ея величину въ уравненіе (442) одной изъ конфокальныхъ поверхностей. Получимъ:

$$\frac{x^2}{A + r^2 - J} + \frac{y^2}{B + r^2 - J} + \frac{z^2}{C + r^2 - J} = 1.$$

Но:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Слѣдовательно точки, для которыхъ одинъ изъ главныхъ моментовъ равенъ J , расположены на поверхности:

$$\frac{x^2}{A + x^2 + y^2 + z^2 - J} + \frac{y^2}{B + x^2 + y^2 + z^2 - J} + \frac{z^2}{C + x^2 + y^2 + z^2 - J} = 1 \quad (443)$$

Это есть знаменитая въ оптикѣ и кристаллографіи Френелева поверхность свѣтовой волны двухоснаго кристалла. Какъ известно, сѣченія ея плоскостями координатъ представляютъ собою кругъ въ эллипсѣ, эллипсъ въ кругѣ и эллипсъ пересѣкающійся съ окружностью. Точки пересѣченія этого эллипса съ окружностью суть *особыя* точки, въ которыхъ вѣшняя полость переходитъ во внутреннюю.

Въ аналитической геометріи доказывается, что поверхность (443) можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ: пересѣчемъ трехосный эллипсоидъ плоскостью, проходящей чрезъ его центръ, въ сѣченіи получимъ эллипсъ, повернемъ его въ его плоскости на 90° . Если со всеми эллипсами получаемыми въ плоскихъ центральныхъ сѣченіяхъ поступимъ также, то-есть повернемъ каждый изъ нихъ на 90° въ его плоскости, то совокупность повернутыхъ эллипсовъ составитъ поверхность (443).

ГЛАВА V.

Вращеніе твердаго тѣла около оси.

§ 189. Общее дифференціальное уравненіе вращенія твердаго тѣла около оси. Примемъ ось вращенія за ось коств. Такая неизмѣняемая система способная вращаться около оси x подчиняется (см. § 142) закону площадей:

$$\sum m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - zY) (114)$$

Это уравненіе (444) и есть общее уравненіе вращенія неизмѣняемой системы (абсолютно твердаго тѣла) около оси подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ.

Въ теченіи времени dt радиусы (перпендикуляры опущенные на ось) всѣхъ точекъ твердаго тѣла повертываются на одинъ и тотъ же уголъ $d\varphi$. Но согласно (135)

$$ydz - zdy = r^2 d\varphi (445)$$

гдѣ r есть радиусъ каждой точки m тѣла. Слѣдовательно

$$m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = mr^2 \frac{d\varphi}{dt} (446)$$

Суммируя (446) на все точки тѣла, получимъ:

$$\sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d\varphi}{dt} \sum mr^2 (447)$$

Здѣсь $\frac{d\varphi}{dt}$ можно было вывести за знакъ суммы, потому что $d\varphi$ для всѣхъ точекъ тѣла одинаково. Согласно съ § 117-мъ

$$\begin{aligned}\varphi &= \omega t \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega, \dots\dots\dots (448)\end{aligned}$$

Слѣдовательно $\frac{dz}{dt}$ есть *угловая* (или *вращательная*) скорость тѣла. Поэтому (447) принимаетъ видъ:

$$\sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \omega J = \frac{d\varphi}{dt} \cdot J \dots\dots\dots (449)$$

Линейная скорость v точки m тѣла, согласно съ (331) равна ωr . Слѣдовательно количество движения m е точки m тѣла равно $m\omega r$. Произведение $m\omega r^2$ этого количества движения на расстояние r точки m отъ оси называется *моментомъ количества движения точки m* . Величина же $\sum m\omega r^2$ называется *моментомъ количества движения оси тѣла*. Изъ (446) и (448) видимъ, что моментъ количества движения точки m равенъ

$$m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = mr^2\omega = mr^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Изъ (449) видимъ, что моментъ количества движения тѣла равенъ:

$$\text{мом колич. движ.} = \sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = \omega \cdot J = \frac{d\varphi}{dt} \cdot J \dots\dots (450)$$

Дифференцируя (450) получимъ:

$$\sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot J.$$

или, согласно съ (444)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot J = \sum (yZ - zY).$$

Но согласно съ (249) правая часть этого уравненія есть моментъ L силъ направленный по оси вращенія x . Итакъ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot J = L \dots\dots\dots (451)$$

Это уравненіе аналогично уравненію

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X.$$

Аналогия эта показываетъ, что моментомъ инерціи измѣряется инерція вращенія.

Начало сохранения площадей (444) приняло видъ уравнения (451), которое можетъ быть выражено такъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \begin{array}{l} \text{моменту силы относит. оси вращения} \\ \text{моментъ инерц. относит. оси вращен.} \end{array} \quad (452)$$

Для мгновенныхъ силъ, напримѣръ для удара, измѣняющаго угловую скорость ω въ ω' , получимъ уравненіе:

$$\omega' - \omega = \begin{array}{l} \text{моментъ удара относит. оси вращен.} \\ \text{моментъ инерц. относит. оси вращен.} \end{array} \quad (453)$$

§ 200. Общее дифференціальное уравненіе движенія тяжелаго твердаго тѣла около горизонтальной оси. Если ось вращенія горизонтальна, ось z взята по вертикали внизъ, то обозначая чрезъ g ускореніе земного тяготѣнія, имѣемъ:

$$\begin{array}{l|l} X = 0 & \\ Y = 0 & \dots\dots\dots (454) \\ Z = mg. & \end{array}$$

Вслѣдствіе этого (444) приметъ видъ

$$\sum m \left[u \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2u}{dt^2} \right] = \sum mgy. \quad (455)$$

§ 201 Физическій маятникъ. Неизмѣняемая система движущаяся, подъ влияніемъ собственной тяжести, около горизонтальной оси, совершая только качанія, а не полные обороты около оси, называется физическимъ маятникомъ. Изслѣдуемъ движеніе физическаго маятника, пользуясь уравненіемъ (451) и сводя дѣло къ сравненію движенія физическаго маятника съ известнымъ намъ изъ § 7, движеніемъ маятника математическаго.



Фиг. 70.

Обозначимъ чрезъ a разстояніе отъ точки подвѣса C до центра O тяжести. Изъ (451) имѣемъ:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = - Mga \cdot \sin \theta \quad (456)$$

Вотъ каковъ окончательный видъ дифференціального уравненія движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около горизонтальной оси.

Интегрируя его получимъ:

$$\frac{d \left(\frac{d\theta}{dt} \right)}{dt} = \frac{Mga}{J} \cdot \frac{d(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{Mga}{J dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} \cdot d \cos \theta$$

или

$$2 \frac{d\theta}{dt} \cdot d \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{2Mga}{J} \cdot d(\cos \theta).$$

Отсюда:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2Mga}{J} (\cos \theta - \cos \alpha) \dots \dots \dots (457)$$

гдѣ α начальный уголъ отклонения прямой CO отъ вертикали

Это уравненіе (457) весьма похоже на уравненіе (229) движенія математическаго маятника, которое можно представить въ видѣ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha) \dots \dots \dots (458)$$

Изъ сравненія уравненій (457) и (458) выводимъ: *физическій маятникъ движется какъ такой математическій, длина котораго равна*

$$l = \frac{J}{Ma} \dots \dots \dots (459)$$

гдѣ: M = масса физическаго маятника.

a = разстояніе его центра тяжести отъ оси вращенія;

J = его моментъ инерціи относительно оси вращенія.

l = длина *изохроннаго* съ нимъ математическаго маятника.

Тотъ маятникъ математическій, который, согласно сказанному, движется какъ данный физическій, называется *изохроннымъ* съ этимъ физическимъ.

§ 202 **Опредѣленіе величины ускоренія g земнаго тяготѣнія.** Мы уже пользовались неоднократно величиною g , представляющею собою ускореніе, производимое притяженіемъ, оказываемымъ земнымъ шаромъ на тѣла находящіеся близъ его поверхности. Теперь мы можемъ показать, какъ эта величина g опредѣляется.

Ее можно было бы опредѣлить изъ формулы

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (234)$$

математическаго маятника зная его длину l и продолжительность колебанія T ; но математическій маятникъ, состоящій изъ *невѣсомой* нити и тяжелой *точки* нельзя устроить. приходится пользоваться маятникомъ физическимъ и тѣми соотношеніями, которые мы только что вывели.

Назовемъ L длину такого математическаго маятника, продолжительность колебанія котораго равна 1 секундѣ, такъ что

$$1 = \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \dots \dots \dots (460)$$

Подвѣсимъ на такой же призмѣ, въ которой подвѣшиваются чаши химическихъ вѣсовъ, металлическую линейку, которая и будетъ физическимъ маятникомъ, и заставимъ ее совершать столь малые колебания чтобы можно было пользоваться приближенной формулою (234).

Обозначимъ чрезъ n число колебаній такого маятника, наблюдаемое въ теченіе t секундъ. Такое же число колебаній, согласно изложенной теоріи, совершаетъ въ t' секундъ математическій маятникъ, имѣющій длину $\frac{J}{Ma}$, такъ что:

$$t' = \pi \sqrt{\frac{J}{Ma}} \dots \dots \dots (461)$$

Для (460) на (461) получимъ:

$$\frac{t'}{n} = \sqrt{\frac{J}{MLa}} \dots \dots \dots (462)$$

Отсюда

$$L = \left(\frac{n'}{t'}\right)^2 \cdot \frac{J}{Ma} \dots \dots \dots (463)$$

Изъ (460) имѣемъ:

$$L = \frac{g}{\pi^2} \dots \dots \dots (464)$$

Изъ (463) и (464) слѣдуетъ:

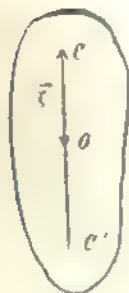
$$g = \pi^2 \left(\frac{n'}{t'}\right)^2 \cdot \frac{J}{Ma} \dots \dots \dots (465)$$

По этой формулѣ (465) можно опредѣлить g , опредѣливъ величины, стоящія въ ея правой части.

Оказывается, что, благодаря неправильности формы земного сфероида, въ различныхъ точкахъ земной поверхности, g имѣетъ разныя величины; въ среднемъ въ Европѣ.

$$g = 981 \left| \begin{array}{l} \text{сантим.} \\ \text{секунда} \end{array} \right| \dots \dots \dots (466)$$

§ 203. Центръ начанія физическаго маятника. Пересѣчемъ мысленно физическій маятникъ плоскостью, проходящею чрезъ его центръ тяжести и перпендикулярною къ оси вращенія. Пересѣченіе этой плоскости съ осью вращенія называется *центромъ подвѣса*.



Фиг. 71

Точка C (фиг. 71) лежащая на прямой соединяющей центръ подвѣса C съ центромъ тяжести O и находящаяся отъ центра подвѣса въ разстояніи

$$\overline{CC'} = l$$

равномъ длинѣ l математическаго маятника, изохроннаго съ даннымъ физическимъ маятникомъ, называется *центромъ начанія* физическаго маятника.

такъ что k есть центральный гирационный радіусъ. Тогда (468) приметъ видъ:

$$l = \frac{k^2}{h} + h \dots \dots \dots (472)$$

Если задана продолжительность колебанія T , то этимъ самымъ задана длина l изохроннаго математическаго маятника. Для даннаго тѣла, служащаго физическимъ маятникомъ, и для даннаго направленія оси вращенія гирационный радіусъ k есть опредѣленная величина. Слѣдовательно, при такихъ заданіяхъ, въ (472) переменнымъ остается только h . Уравненіе (472) по отношенію къ h квадратное, и потому изъ него получимъ для h два рѣшенія h_1 и h_2 .

Опишемъ около оси, къ которой относится k , два цилиндра радіусами h_1 и h_2 . Согласно съ изложенною теоріею физическаго маятника продолжительность колебанія будетъ одинакова, какую бы образующую этихъ двухъ цилиндровъ мы не приняли за ось подвѣса. Эта продолжительность была бы приблизительно равна $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Формулу (472) можно представить въ видѣ:

$$l = 2k + \frac{(h - k)^2}{h} \dots \dots \dots (473)$$

Если въ ней принять за переменное и l , то изъ нея видно, что, съ уменьшеніемъ h отъ весьма большихъ его значеній, l уменьшается. Наименьшую величину $2k$ длина l пріобрѣтаетъ при $h = k$. Съ дальнѣйшимъ же уменьшеніемъ h длина l опять увеличивается. Слѣдовательно если среди взаимно параллельныхъ осей выбирать за оси подвѣса все болѣе и болѣе близкія оси къ центру тяжести, то сначала продолжительность колебаній будетъ уменьшаться, а затѣмъ начнетъ увеличиваться и когда ось подвѣса сдѣлается очень близкою къ центру тяжести, то продолжительность колебанія будетъ очень велика. Наименьшею же она будетъ въ томъ случаѣ, когда разстояніе ея отъ центра тяжести равно k и когда это k наименьшее, то есть когда ось подвѣса параллельна главной центральной оси наименьшаго момента инерціи и когда разстояніе между ними равно гирационному радіусу, соотвѣтствующему этому наименьшему моменту инерціи.

Такъ, напримѣръ, полагая, что въ параллелепипедѣ § 153-го $a > b > c$ найдемъ ось подвѣса, около которой колебанія параллелепипеда будутъ самыя короткія. Изъ (347) видимъ, что наименьшій главный центральный моментъ есть A и соотвѣтствующій ему гирационный радіусъ K опредѣляется изъ уравненія:

$$K^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}$$

Слѣдовательно наиболѣе короткія колебанія этотъ параллелепипедъ будутъ совершать около любой изъ образующихъ цилиндра описаннаго около оси x радиусомъ

$$K = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{12}}.$$

§ 205. Маятникъ карманныхъ часовъ. Въ карманныхъ часахъ маятникъ устрояется слѣдующимъ образомъ (фиг. 72). Стержень BOB' можетъ свободно вращаться около оси O , проходящей чрезъ его центръ тяжести O . На него дѣйствуетъ упругая сила весьма тонкой спиральной пружины, называемый *волоскомъ*. Кромѣ того онъ подталкивается храповымъ колесомъ, приводимымъ во вращение заводною пружиною посредствомъ зубчатыхъ колесъ составляющихъ часовой механизмъ.

Конецъ O волоска закрѣпленъ, такъ, что касательная къ нему, проходящая чрезъ C остается неподвигною. Конецъ B волоска закрѣпленъ такъ, что касательная къ нему, проходящая чрезъ B , составляетъ постоянный уголъ со стержнемъ BOB' . (Опредѣлимъ продолжительность колебанія этого стержня (принимаемаго иногда колесикомъ) совершаемаго имъ послѣ отклоненія его на нѣкоторый уголъ. Возьмемъ ось Ox по направленію принимаемому стержнемъ, когда онъ находится въ положеніи равновѣсія, условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

- θ — уголъ, составляемый въ моментъ t стержнемъ съ осью x .
- M — моментъ инерціи стержня относительно оси O .
- ρ — радиусъ кривизны волоска въ какой либо его точкѣ P .
- ρ_0 — значеніе, принимаемое ρ въ положеніи равновѣсія.
- x, y — координаты точки P волоска.

На стержень дѣйствуютъ проложенія X и Y дѣйствующей силы и считаемая въ обратную сторону (вначало Даламбера § 75) ускорительная сила, которая, согласно (151) равна парѣ съ моментомъ

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

На волосокъ дѣйствуютъ ускорительная сила взятая въ противоположную сторону. Этою силою при малой массѣ волоска можно пренебречь. На него еще дѣйствуютъ упругія силы въ поперечномъ его сѣченіи, при точкѣ P , которыя могутъ быть приведены къ силѣ, приложенной въ P



Фиг. 72.

и къ парѣ. Теорія упругости и практика показываютъ, что моментъ этой пары пропорціоналенъ измѣненію кривизны въ точкѣ P . Выразимъ его поэтому формулою

$$E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right),$$

въ которой коэффициентъ E зависитъ только отъ свойствъ материала волоска и отъ его поперечнаго сѣченія.

Имѣемъ равенство моментовъ:

$$Mk \frac{d\theta}{dt} = E \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) - Xy + Yx \quad (474)$$

Пусть длина части BP волоска равна s . Помноживъ обѣ части уравненія (483) на ds и интегрируя по всей длинѣ l волоска, получимъ

$$Mk \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot l = -E \int_0^l \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) ds + Y \int x ds - X \int y ds \quad (475)$$

Извѣстно, что $\frac{ds}{\rho}$ есть уголъ, составляемый двумя бесконечно близкими нормальми. Слѣдовательно $\int_0^l \frac{ds}{\rho}$ есть уголъ, составляемый первою и послѣднею нормалью. Но, по условію задачи, нормаль въ точкѣ C неподвижна. Слѣдовательно $\int_0^l \frac{ds}{\rho} = \theta$ есть уголъ, составляемый нормалью въ точкѣ B въ положеніи равновѣсія съ нормалью въ той же точкѣ B въ моментъ t , то есть уголъ между положеніями этой нормали при $\theta = 0$ и при $\theta = \theta$.

Но, по условію задачи, нормаль въ точкѣ B составляетъ постоянный уголъ со стержнемъ. Слѣдовательно $\int_0^l \frac{ds}{\rho} = \frac{ds}{\rho_0}$ есть именно уголъ θ_0 , составляемый направлениемъ стержня въ моментъ t съ направлениемъ его при равновѣсіи.

Если обозначимъ чрезъ x , y координаты центра тяжести волоска въ моментъ t , то, согласно (242):

$$\int_0^l x ds = x \cdot l, \quad \int_0^l y ds = y \cdot l \quad (476)$$

Такимъ образомъ (484) принимаетъ видъ

$$Mk \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{E}{l} \cdot \theta + Y \cdot x - X \cdot y \quad (477)$$

Маятникъ этотъ устриваютъ такъ, что въ положеніи равновѣсія центръ тяжести волоска лежатъ на оси вращенія o ; колебанія маятника дѣлаются весьма малыя. Поэтому въ теченіи движенія X и Y очень малы,

x и y тоже остаются малыми. Вслѣдствіе этого величинами X , \bar{y} и Y , x какъ величинами малыми 2-го порядка можно пренебречь. Тогда (477) приметъ видъ:

$$Mk^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{E}{l} \cdot \theta \dots \dots \dots (478)$$

Отсюда, интегрируя, найдемъ, что продолжительность T колебанія равна.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Mk^2 \cdot l}{E}} \dots \dots \dots (479)$$

Изъ этой формулы видно, что T увеличивается съ увеличеніемъ l . Маятникъ устриваютъ такъ, что волосокъ закрѣпленъ въ D . Стержень (Ox , въ которомъ сдѣлано направляющее касательную окошко C), повертывается около O . Если часы отстаютъ, то повертываютъ этотъ стержень Ox такъ, чтобы увеличить разстояніе DC . Тогда уменьшается дѣйствующая длина l волоска, считаемая по его длинѣ отъ B до C , и T дѣлается меньшимъ. Если часы уходятъ впередъ, то приближаютъ C къ D и увеличиваютъ этимъ l и T .

Съ возрастаніемъ температуры возрастаетъ длина стержня BOB' и поэтому возрастаетъ его моментъ инерціи Mk^2 , вслѣдствіе чего, согласно (479) возрастаетъ T , и часы отстаютъ. Для избѣжанія этого въ хронометрахъ прикрѣпляютъ къ стержню BOB' дуги $B'q$ и Fp (фиг. 72) съ маленькими массами при p и q , при чемъ каждая дуга дѣлается изъ полосокъ двухъ металловъ, а именно внѣшняя полоска дѣлается изъ металла болѣе расширяющагося отъ увеличенія температуры. При увеличеніи температуры каждая такая дуга согнется немного; всѣ массы дугъ приближаются къ O , моментъ инерціи уменьшится и это уменьшеніе момента инерціи, слагаясь съ тѣмъ его увеличеніемъ, къ избѣжанію котораго мы стремились, обусловитъ неизмѣняемость момента инерціи отъ измѣненія температуры. Но такъ какъ очень трудно достигнуть полной компенсаціи, то и самые лучшие хронометры вѣрнѣе идутъ при постоянной температурѣ.

§ 206. Кинетическія формулы вращенія неизмѣняемой системы около неподвижной оси. Въ равномерномъ вращеніи около оси скорость опредѣляется по формулѣ (331)

$$v = \omega \cdot r \dots \dots \dots (331)$$

Неравномѣрное вращеніе мы рассматриваемъ какъ рядъ безконечно малыхъ равномерныхъ вращеній. Если въ теченіи времени dt тѣло вращается на уголъ $d\theta$, то, продолжая вращаться равномерно, оно повернулось бы въ единицу времени на уголъ

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \dots \dots \dots (480)$$

Эта величина и называется *угловою* (или *вращательною*) скоростью въ концѣ времени t .

Изъ (331) слѣдуетъ:

$$v = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \dots \dots \dots (481)$$

Изъ (105) заключаемъ, что тангенціальное ускореніе точки вращающагося тѣла, отстоящей отъ оси на разстояніи r , равно

$$\frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \text{тангенц. ускор.} \dots \dots \dots (482)$$

Изъ (106) заключаемъ, что центростремительное ускореніе точки вращающагося тѣла равно:

$$\frac{v^2}{\rho} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \text{центростр. ускорен.} \dots \dots \dots (483)$$

Ускореніемъ вращательнаго движенія называется предѣль $\frac{d\omega}{dt}$ отношенія измѣненія скорости къ измѣненію времени. Изъ (480) видимъ, что оно равно:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \dots \dots \dots (484)$$

§ 207. Давленіе на неподвижную ось вращенія, оказываемое тѣломъ симметричнымъ относительно плоскости, проходящей чрезъ центръ тяжести и перпендикулярной къ оси вращенія. Пусть O центръ тяжести; G и P слагающія реакціи оси по осямъ x и y , X и Y проекціи вѣсннхъ силъ, L ихъ моментъ относительно C ; C центръ подвѣса. По (452) имѣемъ:



Фиг. 33.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\text{стат. мом. задав. силъ}}{\text{мом. инерц. отн. оси вращен.}} \dots \dots (485)$$

Пусть Mk^2 есть моментъ инерціи тѣла относительно оси, проходящей чрезъ центръ тяжести и параллельной оси вращенія, M масса тѣла. По (337) моментъ инерціи относительно оси вращенія равенъ:

$$M(k^2 + h^2).$$

Формула (485) принимаетъ видъ:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L}{M(k^2 + h^2)} \dots \dots \dots (486)$$

Центръ тяжести тѣла, которое, введя реакціи оси, рассматриваемъ какъ свободное, движется такъ, какъ будто всѣ силы были къ нему непосредственно приложены. Но онъ движется по круговой дугѣ, описанной изъ C радіусомъ

$$CO = h.$$

По (482) и (483) получим нормальное и тангенциальное ускорения. Приравнявая их отношениям соответственных силъ къ массѣ, получимъ:

$$h \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Y+G}{M} \dots \dots \dots (487)$$

$$h \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = \frac{X+F}{M} \dots \dots \dots (488)$$

Если дѣйствуетъ только тяжесть, то:

$$X = Mg \cos \theta, \quad Y = -Mg \sin \theta; \quad L = -Mgh \sin \theta.$$

Поэтому:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{gh \sin \theta}{k^2 + h^2} \dots \dots \dots (489)$$

Интегрируя (489), получимъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2gh \cos \theta}{k^2 + h^2} + C \dots \dots \dots (490)$$

Если ω есть угловая скорость при

$$\theta = 90^\circ,$$

то

$$C = \omega^2.$$

Поэтому (490) даетъ.

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2gh \cos \theta}{k^2 + h^2} + \omega^2 \dots \dots \dots (491)$$

Подставивъ опредѣляемыя уравнениями (489) и (491) величины въ (487) и (488), получимъ:

$$-\frac{F}{M} = g \cos \theta \frac{k^2 + 3h^2}{k^2 + h^2} + \omega^2 h \dots \dots \dots (492)$$

$$\frac{G}{M} = h \sin \theta \frac{k^2}{k^2 + h^2} \dots \dots \dots (493)$$

Мы видимъ, что G не зависитъ отъ начальныхъ данныхъ. Напротивъ того, F зависитъ отъ ω .

Для мгновенныхъ силъ, принимая за ω и ω' угловые скорости до и послѣ удара получимъ:

$$\omega' - \omega = \frac{L}{M(k^2 + h^2)},$$

$$h(\omega' - \omega) = \frac{Y+F}{M} \dots \dots \dots (494)$$

$$X + F = 0.$$

§ 208. Давленіе на неподвижную ось вращенія, если силы и тѣло несимметричны относительно плоскости, проходящей чрезъ ось и чрезъ центръ тяжести. Примемъ ось вращенія за ось z . Возьмемъ, пока, начало координатъ и плоскость (x, z) произвольно.

Пусть:

x, y, z суть координаты центра тяжести.

ω угловая скорость въ моментъ t .

$$p = \frac{d\omega}{dt} = \text{угловое ускореніе} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Согласно (482) и (483) имѣемъ для точки тѣла, находящейся на разстояніи r отъ оси:

$$p \cdot r = \text{тангенц. ускор.} \quad (495)$$

$$\omega^2 r = \text{центрострем. ускор.} \quad (496)$$

Если въ моментъ t радіусъ r составляетъ съ плоскостью (x, z) уголъ θ , то:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cdot \cos \theta - pr \sin \theta = -\omega^2 x - py \quad (497)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + p \cdot x \quad (498)$$

Слагающія равнодѣйствующей силы и равнодѣйствующей пары будутъ:

$$X_1 = \sum m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum m (-\omega^2 x - py) = -\omega^2 Mx - p \cdot M \cdot y \quad (499)$$

$$Y_1 = \sum m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum m (-\omega^2 y + px) = -\omega^2 M \cdot \bar{y} + p \cdot M \cdot \bar{x} \quad (500)$$

$$Z_1 = \sum m \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (501)$$

$$L_1 = \sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) = -\sum m z \frac{d^2y}{dt^2} - \omega^2 \sum m yz - p \sum m xz \quad (502)$$

$$M_1 = \sum m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) = \sum m z \frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 \sum m xz - p \sum m yz \quad (503)$$

$$N_1 = \sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) = \sum m r^2 \frac{d\omega}{dt} = Mk' p \quad (504)$$

Положимъ, что тѣло прикрѣплено къ оси вращенія въ двухъ точкахъ, находящихся на разстояніяхъ a и a' отъ начала координатъ. Пусть слагающія реакцій точекъ на тѣло суть F, G, H, F', G', H' . Пусть X, Y, Z суть слагающія заданной силы, дѣйствующей на точку m тѣла.

Тогда получимъ:

$$\Sigma mX + F + F' = -\omega^2 Mx - pMy \dots (505)$$

$$\Sigma mY + G + G' = -\omega^2 My + pMx \dots (506)$$

$$\Sigma mZ + H + H' = 0 \dots (507)$$

$$\Sigma m(yZ - zY) - Ga = G'a' = \omega^2 \Sigma myz = p \Sigma mxz \dots (508)$$

$$\Sigma m(zX - xZ) + Fa + F'a' = -\omega^2 \Sigma mxz = p \Sigma myz \dots (509)$$

$$\Sigma m(xY - yX) = pMk^2 \dots (510)$$

Уравненіе (510) опредѣляетъ $p = \frac{d\omega}{dt}$; по интеграціи опредѣлится ω . (505), (508) и (509) опредѣляютъ затѣмъ F , G , F' , G' . Величины H и H' остаются неопредѣленными, но сумма ихъ опредѣляется уравненіемъ (507).

Значительныя упрощенія бывають въ слѣдующихъ случаяхъ.

1) Когда ось z есть одна изъ главныхъ осей инерціи для начала координатъ. Тогда

$$\Sigma mxy = 0; \quad \Sigma myz = 0.$$

2) Результатъ остается такимъ же, если изберемъ плоскость (x, z) такъ, чтобы она содержала центръ тяжести въ разсматриваемый моментъ; тогда $y = 0$.

3) Точки прикрѣпленія оси произвольны; поэтому можно положить $a = 0$.

Въ случаѣ дѣйствія мгновенныхъ силъ обозначаемъ чрезъ u, v, w проложенія скорости точки m тѣла до удара, чрезъ u', v', w' эти проложенія послѣ удара. Тогда:

$$u = -y\omega; \quad u' = -y\omega'; \quad v = x\omega; \quad v' = x\omega', \quad w = 0; \quad w' = 0,$$

гдѣ ω угловая скорость до удара, ω' угловая скорость послѣ удара.

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \Sigma m(u' - u) = M\bar{y}(\omega' - \omega) \\ Y_1 &= \Sigma m(v' - v) = M\bar{x}(\omega' - \omega) \\ Z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (511)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= \Sigma m[y(w' - w) - z(v' - v)] = -\Sigma mxz(\omega' - \omega) \\ M &= \Sigma m[z(u' - u) - x(w' - w)] = -\Sigma myz(\omega' - \omega) \\ N &= \Sigma m[x(v' - v) - y(u' - u)] = Mk^2(\omega' - \omega) \end{aligned} \right\} \dots (512)$$

По началу Даламбера:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X + F + F' &= -My(\omega' - \omega) \\ \Sigma Y + G + G' &= Mx(\omega' - \omega) \\ \Sigma Z + H + H' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (513)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma (yZ - zY) - Ga - G'a' &= -\Sigma mzx(\omega' - \omega) \\ \Sigma (zX - xZ) + Fa + F'a' &= -\Sigma myz(\omega' - \omega) \\ \Sigma (xY - yX) &= Mk^2(\omega' - \omega) \end{aligned} \right\} \dots (514)$$

Здѣсь могутъ быть такія же упрощенія какъ выше.

209. Исслѣдованіе результатовъ §§ 207 и 208. Изъ того, что силы и давленія входятъ въ формулы двухъ предыдущихъ параграфовъ линейно (въ первыхъ степеняхъ) слѣдуетъ, что продолженія всѣхъ силъ и давленій суть суммы продолженій отдѣльныхъ силъ и давленій. Поэтому давленія оси на тѣло можно раздѣлить на 2 группы: 1) статическія, уравновѣшивающіяся съ заданными силами и 2) динамическія, уравновѣшивающіяся съ ускорительными силами $m \frac{d^2x}{dt^2}$. . . $m \frac{d^2y}{dt^2}$. . .

Равнодѣйствующую статическихъ давленій можно предѣлать приравнять нулю лѣвыя части уравненій (505), (506), (507, и уравненій (508), (509) и (510). Эти уравненія не измѣнятся, если перемѣнимъ заданныя силы параллельно имъ самимъ и введемъ соответствующія пары.

Если, напримѣръ, на тѣло дѣйствуетъ только тяжесть и ось вращенія горизонтальна, то *статическое* давленіе на ось вертикально, равно вѣсу тѣла и приложено къ основанію перпендикуляра, опущеннаго на ось изъ центра тяжести.

Статическое давленіе на ось, производимое ударомъ, направленнымъ перпендикулярно къ оси, предѣлимъ, если перенесемъ этотъ ударъ въ положеніе ему параллельное, но проходящее чрезъ ось.

Если ось вращенія Oz есть одна изъ главныхъ осей для начала координатъ O , то изъ (503) слѣдуетъ, $L_1 = 0$; $M_1 = 0$. Тогда ускорительныя (по началу Даламбера) силы суть X_1 , Y_1 , приложенныя въ O и пара N_1 . Силы X_1 и Y_1 суть ускорительныя силы массы M , помѣщенной въ центрѣ тяжести. Пара N_1 входитъ только уравненіе (504) и вліяетъ косвенно на F , G , F' , G' только тѣмъ, что измѣняетъ p . Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ давленія на ось, вызванныя ускорительными силами, равносильны одной силѣ, приложенной къ той точкѣ O оси, для которой ось есть одна изъ главныхъ осей инерціи и равной ускорительной силѣ массы M всего тѣла, сосредоточенной въ центрѣ тяжести. Если r есть длина перпендикуляра, опущеннаго на ось изъ центра тяжести, то слагающая этого давленія, направленная по r , равна

$$-\omega^2 M \bar{r} \dots \dots \dots (515)$$

слагающая же, направленная перпендикулярно къ плоскости, проходящей чрезъ τ и ось равна:

$$p \cdot M\bar{r} \dots \dots \dots (516)$$

Итакъ, если для какой-либо точки O оси вращения эта ось есть одна изъ главныхъ осей инерции, то давление оси на тѣло приводится къ двумъ силамъ: одна изъ нихъ (статическая) равна и противоположна вѣсу тѣла и приложена къ основанию перпендикуляра, опущеннаго на ось вращения изъ центра тяжести; вторая (динамическая) равна ускорительной силѣ массы M сосредоточенной въ центрѣ тяжести и приложена въ точку O оси вращения.



Фиг. 74.

§ 210. **Перманентныя оси вращения.** Положимъ, что абсолютно твердое тѣло, на которое не дѣйствуютъ никакія силы, имѣетъ только одну неподвижную точку O , и тѣмъ этому сообщено вращеніе около некоторой (воображаемой) оси Oz . (спрашивается при какихъ условіяхъ тѣло будетъ продолжать вращеніе около этой оси такъ, какъ будто бы она была неподвижна). Если эти условія выполнены, то ось вращения называется *перманентною*. Если же эти условія не выполнены, то ось вращения сама будетъ двигаться около O .

Если ось вращения, проходящая чрезъ неподвижную точку O , остается неподвижною, то, слѣдовательно, какая-нибудь другая ея точка A неподвижна. Вычисляемъ по формуламъ предыдущаго параграфа силы, приложенныя въ A для поддержанія неподвижности оси вращения. Если эти силы равны нулю, то закрѣпленіе оси въ A излишне, и рассматриваемая ось *перманентна*.

Но мы предположили, что на тѣло не дѣйствуютъ никакія силы, поэтому давление на ось можетъ проходить только отъ ускорительныхъ силъ. Если ось Oz есть одна изъ главныхъ осей инерции для одной изъ своихъ точекъ, то согласно § 207, давление это приложено въ этой точкѣ. Слѣдовательно, давление въ A можетъ быть равно нулю только тогда, когда точка оси вращения, для которой эта ось есть одна изъ главныхъ осей инерции, совпадаетъ съ неподвижною точкою O . Итакъ, ось Oz *перманентна*, если она есть одна изъ главныхъ осей инерции для неподвижной точки O .

Докажемъ, что это условіе не только достаточно, но и необходимо для перманентности оси Oz .

Если O примемъ за начало координатъ и будемъ по формуламъ § 208

*, Снарядъ показывающій, что тѣло можетъ имѣть неподвижною только эту точку, легко устроить напрямфр такъ укрѣпить вертикально заостренный кончикъ верху палку и на это острое опрокинуть стаканъ, опираясь внутреннею поверхностью дна на острие O , стаканъ представить собой тѣло, вращающееся около O .

опредѣлять давления F, G, H на O и давления F', G', H' на A , то:

$$a = o; \quad a' = OA.$$

Силы на тѣло не дѣйствуютъ; слѣдовательно, уравненіе (504) даетъ $Mk'^2 p = o$. Поэтому $p = o$. Далѣе изъ уравненій (508) и (509) получимъ:

$$-G'a' = \omega^2 \Sigma m y z$$

$$F'a' = -\omega^2 \Sigma m x z.$$

Слѣдовательно F'' и G' могутъ быть равными нулю только при

$$\Sigma m y z = o,$$

$$\Sigma m x z = o,$$

то есть ось Ox можетъ быть *только* въ томъ случаѣ перманентною осью, если она есть одна изъ главныхъ осей для неподвижной точки O .

§ 211. Начальная ось вращенія, возникающая въ покоящемся тѣлѣ, имѣющемъ одну неподвижную точку, при дѣйствіи импульсивной пары. На тѣло, имѣющее одну неподвижную точку O и находящееся въ покоѣ, дѣйствуетъ импульсивная (мгновенная) пара. Опредѣлить ось, около которой *начинается* вращеніе тѣла.

Пусть искомая ось вращенія есть Oz . Положимъ сначала (какъ въ предыдущемъ параграфѣ), что ось эта еще подперта въ A , а затѣмъ приравняемъ вызванна въ A импульсивною парю давления нулю. Пусть L, M, N суть слагающія импульсивной пары. Уравненіе плоскости пары таково:

$$L\xi + M\eta + N\zeta = o \dots \dots \dots (517)$$

Пусть u', v', w' суть начальные скорости точки (x, y, z) тѣла; ω' начальная угловая скорость тѣла, вызванна импульсивною парю. Тогда такъ же какъ и въ § 208.

$$\left. \begin{aligned} u' &= -y\omega' \\ v' &= x\omega' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (518)$$

$$\left. \begin{aligned} L - G'a' &= \Sigma m (yu' - zv') = -\omega' \cdot \Sigma m xz \\ M + F'a' &= \Sigma m (zu' - xv') = -\omega' \cdot \Sigma m yz \\ N &= Mk'^2 \omega' \end{aligned} \right\} \dots \dots (519)$$

Если положить $F'' = o$; $G' = o$, то (519) дадутъ пары, которыя должны дѣйствовать на тѣло, для того чтобы оно начало вращаться именно около Oz .

Подставивъ L, M, N въ (517) получимъ уравненіе плоскости пары въ видѣ:

$$-\xi \cdot \Sigma m x z - \eta \cdot \Sigma m y z + \zeta \cdot Mk'^2 = o \dots \dots \dots (520)$$

Если эллипсоидъ инерціи, построенный для неподвижной точки O , вы-

ражается уравненіемъ

$$A\dot{\xi}^2 + B\dot{\eta}^2 + C\dot{\zeta}^2 - 2D\dot{\eta}\dot{\zeta} - 2E\dot{\xi}\dot{\zeta} - 2F\dot{\xi}\dot{\eta} = k \dots (521)$$

то уравненіе диаметральной плоскости его сопряженной съ осью ζ будетъ:

$$-E\xi - D\eta + C\zeta = 0 \dots (522)$$

Сравнивая съ (520) заключаемъ, что плоскость равнодѣйствующей пары должна быть сопряженная съ осью вращения по отношенію къ эллипсоиду инерціи, построенному для неподвижной точки O .

Итакъ: покоящееся на неподвижной точкѣ тѣло, не подверженное дѣйствію силъ, начинаетъ вращаться подъ вліяніемъ импульсивной пары около оси сопряженной съ плоскостью этой пары по отношенію къ эллипсоиду инерціи, построенному для неподвижной точки.

Эта ось называется начальною осью вращенія (die Axe der spontanen Rotation).

§ 212 Центр удара. Если тѣло, способное вращаться около неподвижной оси подвергается такому удару, который не производитъ на эту ось никакого навленія, то всякая точка тѣла, лежащая на линіи такого удара (на прямой, по которой ударъ направленъ), называется центромъ удара.

Если сдѣлать неподвижною начальную ось вращенія, соответствующую данному удару о тѣло подпертое въ одной точкѣ, то ударъ окажется направленнымъ въ центръ удара, соответствующій этой оси.

Положимъ, что тѣло представляетъ изъ себя пластинку, подвѣшенную неподвижно за одну точку C , такъ что центръ тяжести O находится на вертикали подѣ C . Положимъ, что въ эту пластинку производится въ ея плоскости горизонтальный ударъ Y приложенный въ точкѣ A , лежащей на продолженіи прямой CO . Пусть:

F' реакція въ C направленная по CO .

G реакція въ C направленная перпендикулярно къ CO

$CA = a$,

$h = CO$.

ω' угловая скорость послѣ удара.

Согласно (494) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \frac{Ya}{M(k^2 + h^2)} \\ h\omega' &= \frac{Y + G}{M} \\ F' &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (523)$$

Если, какъ это требуется для удара направленного въ центръ удара, давленіе на O равно нулю, то $G = 0$, и изъ (523) получимъ:

$$k^2 + h^2 = ah \dots (524)$$

Сравнивая съ (472) получимъ:

$$a = k.$$

Слѣдовательно, центръ удара нагложится въ центръ качанія для удара, произведеннаго описаннымъ въ настоящемъ параграфѣ способомъ.

Положимъ теперь, что ударяется не пластинка, а тѣло способное вращаться около неподвижной оси. Пусть:

Ось вращенія есть ось z .

Плоскость (x, z) проходить черезъ центръ тяжести.

X, Y, Z слагающія удара.

ξ, η, ζ суть координаты точки тѣла, лежащей на линіи удара.

Mk моментъ инерціи тѣла около неподвижной оси.

Примѣняя уравненія (513) и (514) полагая въ нихъ $y = 0$ и полагая давленія на ось равными нулю получимъ:

$$X = 0; Y = M\bar{x}(\omega' - \omega); Z = 0 \dots \dots \dots (525)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta Z - \zeta Y &= -(\omega' - \omega) \Sigma m x z \\ \zeta X - \xi Z &= -(\omega' - \omega) \Sigma m y z \\ \xi Y - \eta X &= (\omega' - \omega) M k^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (526)$$

Изъ этихъ уравненій (525) и (526) видно, что центръ удара существуетъ только въ томъ случаѣ, если:

1) ударъ направленъ перпендикулярно къ плоскости, проходящей чрезъ неподвижную ось и содержащей центръ тяжести,

2) если неподвижная ось есть одна изъ главныхъ осей инерціи для какова-либо лежащей на ней точки. Потому что изъ (525) и (526) дѣлается:

$$\Sigma m y z = 0, \quad \zeta = \frac{\Sigma m x z}{M \bar{x}}$$

Но начало координатъ можетъ быть взято въ любой точкѣ неподвижной оси, и его можно такъ выбрать, чтобы $\Sigma m x z = 0$.

§ 213 Баллистическій маятникъ. Для опредѣленія начальной скорости ядра, то есть той скорости, съ которою ядро вылетаетъ изъ пушки можно пользоваться баллистическимъ маятникомъ Робинса, устраиваемымъ слѣдующимъ образомъ. Къ толстому деревянному брусу, подвѣшенному на горизонтальной оси прикрѣпляется пушка. При выстрѣлѣ такой маятникъ, вслѣдствіе реакціи, отклоняется отъ своего положенія равновѣсія, и по величинѣ этого отклоненія, какъ сейчасъ увидимъ, можно судить о начальной скорости ядра. Уголъ, на который отклоняется маятникъ, измѣряется длиною шнурка, закрѣпленнаго въ маятникъ, сматываемаго отклоненіемъ маятника съ ролика, на которомъ шнурокъ былъ намотанъ. Пусть:

h — разстояніе центра тяжести маятника съ пушкою отъ неподвижной оси.

p = разстояние оси пушки отъ неподвижной оси.

C = разстояние точки прикрѣпленія шнура къ маятнику отъ неподвижной оси.

m = масса ядра.

M = масса маятника съ пушкой.

$$n = \frac{M}{m}.$$

b = хорда измѣряемая шнуркомъ.

k = радиусъ инерціи маятника съ пушкой относительно неподвижной оси.

v = искомая начальная скорость ядра.

Взрывъ заряда производитъ равные и противоположные удары на ядро и на пушку. Этотъ ударъ измѣряется количествомъ движенія mv .

Замѣняя въ (185) условное ускореніе $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ измѣненіемъ скорости $\omega' - \omega$ получимъ:

$$\omega - \omega' = \frac{\text{моментъ удара относительно оси вращения}}{\text{моментъ инерціи относительно оси вращения}}. \quad (527)$$

Въ настоящемъ случаѣ эта формула принимаетъ видъ

$$\omega = \frac{mvp}{Mk^2}. \quad (528)$$

Дальнѣйшее движеніе опредѣляется по (185) формулою.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{gh}{k^2} \sin \theta. \quad (529)$$

Интегрируя (529), получимъ:

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2gh}{k^2} \cos \theta + C. \quad (530)$$

При $\theta = 0$, имѣемъ $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. Если α есть уголъ отклоненія маятника то при $\theta = \alpha$, имѣемъ $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Поэтому (530) даетъ

$$k^2\omega^2 = 2gh(1 - \cos \alpha). \quad (531)$$

Исключая ω изъ (531) и (528), получимъ.

$$v = \frac{nk'}{p} \cdot 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{gh}. \quad (532)$$

Но

$$b = 2c \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Слѣдовательно:

$$v = \frac{nbk'}{cp} \sqrt{gh}. \quad (533)$$

Для опредѣленія k производимъ отдѣльный опытъ: наблюдаемъ продолжительность T колебанія баллистическаго маятника съ пушкой послѣ

отклонения его на малый начальный уголъ. Затѣмъ по (459) и (234) получимъ уравненіе:

$$T = \pi \sqrt{\frac{k'^2}{gh}} \dots \dots \dots (534)$$

изъ котораго и опредѣляемъ k' . Подставляя k' въ (533), опредѣлимъ c .

ГЛАВА V.

Равновѣсіе абсолютно твердыхъ тѣлъ, между которыми существуетъ треніе.

§ 214. Скольженіе и катаніе. Если во время движенія два тѣла A и B касаются одно съ другимъ, то могутъ быть три случая:

1) Дуги ds и ds' , проходимыя общею точкою a соприкосновенія по тѣлу A и по тѣлу B , могутъ быть равны между собою

$$ds = ds' \dots \dots \dots (535)$$

Такое движеніе называется *чистымъ катаньемъ*.

2) Одна изъ дугъ ds или ds' равна нулю. Такое движеніе называется *чистымъ скольженьемъ*.

3) Дуги ds и ds' могутъ быть неравными между собою и не равны нулю. Такое движеніе называется катаньемъ со скольженьемъ.

§ 215. Общее понятіе о треніи. Когда тѣло B движется по тѣлу A , то появляется сила сопротивляющаяся движенію, сила, дѣйствующая въ сторону противоположную движенію. Эту силу и называютъ треніемъ.

Различаютъ два рода тренія: *трение скольженія*, являющееся при скольженіи одного тѣла по другому и *пара тренія*, являющаяся при катаньи одного тѣла по другому.

Если одно тѣло катится и скользитъ по другому, то приходится разсматривать и трение скольженія и трение катанья.

§ 216. Законы тренія скольженія. Изъ многочисленныхъ опытовъ Кулона, Морена и другихъ оказалось слѣдующее:

1) Трение F скольженія пропорционально нормальному давленію N одного тѣла на другое.

1) Трение скольженія не зависитъ отъ величинъ поверхности соприкосновенія тѣлъ.

3) При началѣ движенія одного тѣла по другому трение скольженія больше чѣмъ во время движенія, но при движеніи оно не зависитъ (или весьма мало зависитъ) отъ скорости.

4) Трение скольженія зависитъ отъ свойствъ и состоянія трущихся поверхностей.

Первый из этих законов дает формулу

$$F = f \cdot N \dots \dots \dots (536)$$

въ которой f есть некоторый коэффициентъ, зависящій отъ свойствъ и состоянія трущихся поверхностей и называемый *коэффициентомъ тренія*.

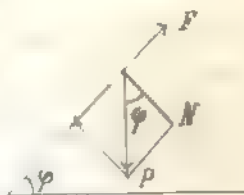
§ 217. **Опредѣленіе коэффиціента тренія скольженія.** Для того чтобы опредѣлять коэффициентъ f поступаютъ слѣдующимъ образомъ.

Кладутъ тѣло, нижняя поверхность котораго по крайней мѣрѣ, сдѣлана изъ испытываемаго вещества на наклонную поверхность (фиг. 75), поверхность которой сдѣлана изъ испытываемаго другого (или того же самаго) вещества. Пусть:

α = уголъ наклоненія наклонной плоскости къ горизонту.

P = вѣсъ положеннаго на плоскость тѣла.

Увеличиваютъ постепенно уголъ α до тѣхъ поръ, пока положенное на плоскость тѣло начнетъ скользить. Положимъ эг случилось, когда α возростъ до φ . Уголъ φ называютъ угломъ тренія, такъ что: уголъ φ тренія есть предѣльный уголъ, при которомъ, въ этомъ опытѣ, положенное на плоскость тѣло начинаетъ скользить.



Фиг. 75.

При наклонѣ плоскости равномъ углу φ тренія слагающая $P \cdot \sin \varphi$ вѣса тѣла какъ разъ равна и противъположна силѣ F тренія. Поэтому, и согласно (536)

$$F = f \cdot N = P \cdot \sin \varphi \dots \dots \dots (537)$$

Но изъ чертежа (фиг. 75) видно, что:

$$N = P \cdot \cos \varphi \dots \dots \dots (538)$$

Слѣдовательно

$$f \cdot P \cdot \cos \varphi = P \sin \varphi$$

откуда:

$$f \cdot \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (539)$$

Итакъ, *коэффициентъ тренія f равенъ тангенсу угла тренія.*

Продѣлавъ такой опытъ и наблюдая уголъ φ , при которомъ тѣло начинаетъ скользить, достаточно взять изъ таблицъ $\operatorname{tg} \varphi$, чтобы получить величину f . Можно этотъ тангенсъ опредѣлить и безъ таблицъ прямо взявъ отношеніе катетовъ треугольника ABC

$$f = \operatorname{tg} \varphi = \frac{BC}{AB}$$

Для многихъ тѣлъ, существуютъ таблицы, въ которыхъ даются f .

Для тренія камня по камню, напримѣръ, $f = 0,60$.

Для тренія стали по льду $f = 0,10$.

Когда f извѣстно изъ опыта или изъ таблицъ, то самое треніе F предѣляется по формулѣ (536).

§ 218. Пара трения при катании. Для определения пары трения при катании поступают иначе. Кладут на горизонтальную плоскость валъ C изъ испытываемого вещества. Въ плоскости дѣлаютъ прорѣзь. Перекидываютъ черезъ валъ шнурокъ; пропускаютъ концы его въ прорѣзь и, навѣсивъ на оба конца шнурка по грузу P , увеличиваютъ одинъ изъ этихъ грузовъ постепенно. Пусть p будетъ тотъ добавочный грузъ на который надо увеличить грузъ P одного изъ концовъ для того, чтобы валъ началъ двигаться. Тогда, если радиусъ вала равенъ r , то моментъ пары трения равенъ

$$pr \dots \dots \dots (540)$$

потому что: реакція плоскости на валъ въ точкѣ A , при вѣсѣ вала равномъ W равна

$$W + 2P + p$$

и дѣйствуетъ по вертикали вверхъ, уничтожаясь равнымъ и противоположнымъ давлениемъ нагруженнаго вала; скольжения въ точкѣ A , а следовательно и трения скольжения не наблюдается; остается статическій моментъ относительно A равный pr .

Опыты показали, что p прямо пропорціонально давленію и обратно пропорціонально радиусу. Эту величину p называютъ иногда *трениемъ катанья*.

При обратной пропорціональности трения p катанья съ радиусомъ r , моментъ пары трения не зависитъ отъ радиуса и пропорціоналенъ давленію.

§ 219. Матеріальная точка помѣщена на шероховатой плоской кривой подѣ дѣйствіемъ данной силы. Найти ея положеніе равновѣсія *). Пусть X , Y суть слагающія данной силы.

N — давленіе кривой на точку, считаемое по внутренней нормали,

F — треніе скольженія, направленное по элементу кривой.

ψ — уголъ наклоненія касательной къ оси x .

Положимъ, что данную силою точка прижимается къ кривой.

Для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы проложенія всѣхъ дѣйствующихъ силъ на касательную и на нормаль были равны нулю, то есть, чтобы:

$$\left. \begin{aligned} X \cdot \cos \psi + Y \cdot \sin \psi + F &= 0 \\ -X \cdot \sin \psi + Y \cdot \cos \psi + N &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (541)$$

Отсюда, согласно (536) для равновѣсія должно быть

$$\frac{X \cos \psi + Y \sin \psi}{-X \sin \psi + Y \cos \psi} < f \dots \dots \dots (542)$$

§ 220. Конусъ трения. Задачи на опредѣленіе положенія равновѣсія удобнѣе рѣшаются при помощи слѣдующихъ соображеній.

*) Рѣсто того чтобы говорить, что тѣла или кривыя способны проявлять треніе, мы будемъ говорить, что они шероховаты (англ. rough).

Пусть точка P находится на шероховатой кривой AB . Опишем около нормали, проведенной въ P , конусъ, образующія котораго составляютъ съ нормалью уголъ равный углу φ трения. Тогда, согласно сказанному въ 217, заданная дѣйствующая на точку P сила можетъ двинуть ее только въ томъ случаѣ, если она лежитъ внѣ этого конуса. Такой конусъ называется *конусомъ трения*. Отсюда слѣдуетъ. *Точка находится на кривой въ равновѣсіи, если заданная сила лежитъ внутри конуса трения.*

§ 221. Матеріальная точка помѣщена на шероховатой кривой двойной кривизны подъ дѣйствіемъ данной силы. Найти ея положеніе равновѣсія. Пусть:

X, Y, Z проложенья данной силы R ,

T проложенье силы R на касательную.

Согласно (536) T должно быть; для равновѣсія, въ f разъ меньше нормальнаго давления $\sqrt{R^2 - T^2}$. Слѣдовательно:

$$T^2 < \mu^2 (R^2 - T^2) \dots \dots \dots (543)$$

Это неравенство можно написать въ видѣ.

$$\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right)^2 < \frac{f}{1+f^2} (X^2 + Y^2 + Z^2) \dots (544)$$

Матеріальная точка будетъ въ равновѣсіи во всѣхъ точкахъ кривой, удовлетворяющихъ неравенству (544).

Если вѣсто знака неравенства поставимъ въ (544) знакъ равенства, то найдемъ предѣльныя положенія равновѣсія точки.

§ 222. Матеріальная точка находится на шероховатой поверхности подъ дѣйствіемъ данной силы. Найти положеніе равновѣсія данной точки.

Пусть:

Q нормальная составляющая заданной силы R

$$\dots \dots \dots f(x, y, z) = 0 \dots \dots \dots (545)$$

уравненіе поверхности.

Для равновѣсія нужно соблюденіе условія

$$R^2 - Q^2 < f^2 Q^2.$$

Которому можно придать видъ:

$$\frac{\left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} > \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)}{1+f^2} \dots \dots (546)$$

Уравненіе же

$$\frac{\left(X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} = \frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)}{1+f^2} \dots \dots (547)$$

представляет собою поверхность, пересѣченіе которой съ данной поверхностью есть граница той ея области, во всѣхъ точкахъ которой матеріальная точка находится въ равновѣсіи.

§ 223. Примеры.

1) Найти положенія равновѣсія тяжелой точки m на циклоидѣ, обращенной вершиною внизъ, если радіусъ образующаго циклоиду круга равенъ a .

Обыкновенно циклоида относится къ такимъ осямъ, что вершина ея находится въ разстояніи $2a$ отъ оси x . Тогда она опредѣляется уравненіями

$$x = a (\theta - \sin \theta)$$

$$y = a (1 - \cos \theta)$$

Изъ этихъ уравненій уголъ ϕ наклоненія касательной къ оси x опредѣляется по формулѣ:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{2a - y}{y} \quad \dots \dots \dots (548)$$

Если, согласно условіямъ задачи, ось x касается циклоиды въ вершинѣ a , ось y направлена въ сторону противоположную той, въ какую она направлена въ системѣ координатъ, при которой получено (548), то для перехода къ новымъ координатамъ надо замѣнить въ (548) y чрезъ $2a - y$. Тогда

$$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{\frac{y}{2a - y}} \quad \dots \dots \dots (549)$$

По условіямъ задачи.

$$X = 0; \quad Y = -mg.$$

Поэтому (542) принимаетъ видъ:

$$\operatorname{tg} \phi = f = \operatorname{tg} \varphi \quad \dots \dots \dots (550)$$

гдѣ φ уголъ тренія. Изъ (549) и (550) имѣемъ.

$$\sqrt{\frac{y}{2a - y}} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда

$$y < \frac{2a \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

или

$$y < 2a \cdot \sin^2 \varphi.$$

Итакъ: всѣ точки циклоиды, лежащія на высотѣ (считая отъ вершины циклоиды) меньшей чѣмъ $2a \cdot \sin^2 \varphi$, могутъ быть положеніями равновѣсія матеріальной точки, если φ уголъ тренія.

2) Определить положенія равновѣсія тяжелой точки на эллипсоидѣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, въ которомъ ось z вертикальна, принимая во вниманіе

трение. Для того, чтобы можно было приходить къ рѣшенію этой задачи формулу (547), вычисляемъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -mg.$$

Формула (547) принимаетъ поэтому видъ:

$$\frac{m^2 g^2 \cdot 4z^2}{4c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)} = \frac{m^2 g^2}{1 + \mu^2}$$

или

$$z^2 (1 + \mu^2) = c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)$$

или

$$z^2 \mu^2 = c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) \dots \dots \dots (551)$$

Линія пересѣченія этой поверхности съ даннымъ эллипсоидомъ окружаетъ на немъ область точекъ равновѣсія.

Исключая z изъ уравненія данного эллипсоида и изъ (551), получимъ уравненіе цилиндра:

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \mu^2 = c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)$$

пересѣченіе котораго съ даннымъ эллипсоидомъ даетъ ту же линію. Это уравненіе приводится въ виду:

$$\frac{x^2}{a^2} \left(1 + \frac{c^2}{a^2 \mu^2} \right) + \frac{y^2}{b^2} \left(1 + \frac{c^2}{b^2 \mu^2} \right) = 0 \dots \dots \dots (552)$$

Итакъ: область положенія равновѣсія тяжелой точки на данномъ эллипсоидѣ ограничена на немъ линіею пересѣченія его поверхности съ поверхностью эллиптическаго цилиндра (552).

Если возьмемъ песокъ, составленный изъ песчинокъ, коэффициентъ тренія которыхъ о матеріалъ, послужившій для устройства эллипсоида, равенъ μ , и осторожно насыпемъ его на эллипсоидъ, то онъ расположится въ области, ограниченной линіею пересѣченія поверхности эллипсоида съ поверхностью (552), и эта линія будетъ видна какъ очертаніе песчаного пятна.

3) Показать, что область положенія равновѣсія тяжелой точки на гиперболическомъ параболоидѣ $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} - 2z = 0$, въ которомъ ось z вертикальна, ограничена на немъ пересѣченіемъ его поверхности съ поверхностью эллиптическаго цилиндра.

$$\mu^2 p^2 + \mu^2 q^2 = 1.$$

4) Лѣстница поставлена нижнимъ концомъ на горизонтальную плоскость, верхній конецъ ея прислоненъ къ вертикальной стѣнѣ. Найти положеніе равновѣсія лѣстницы, принимая во вниманіе треніе ея о полъ и о стѣну. Пусть:

AB лѣстница, длина которой $2l$;

w —вѣсъ лѣстницы, приложенной къ центру тяжести C ;

R —давленіе пола на лѣстницу въ A ;

R' —давленіе стѣны на лѣстницу въ B ;

μ —коэффициентъ тренія съ поломъ;

μ' —коэффициентъ тренія со стѣною;

ξR —треніе въ A , гдѣ $\xi < \mu$;

$\eta R'$ —треніе въ B , гдѣ $\eta < \mu'$;

θ —уголъ наклона лѣстницы къ горизонту.

Для равновѣсія должны быть, согласно (256), равны нулю всѣ проложенія силъ и проложенія моментовъ паръ. Поэтому уравненія равновѣсія будутъ:

$$\xi R - R' = 0$$

$$\eta R' + R - w = 0$$

$$2\eta R \cdot l \cdot \cos \theta + 2R' \cdot l \sin \theta - w \cdot l \cos \theta = 0.$$

Исключивъ R и R' находимъ:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1 - \xi \mu}{2\xi}.$$

Если треніе столь мало, что $\mu, \mu' < 1$, то минимальный наклонъ θ опредѣлится уравненіемъ.

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{1 - \mu \mu'}{2\mu}.$$

Если $\mu \mu' > 1$, то лѣстница находится въ равновѣсіи при всякихъ θ .

5) Лѣстница находится въ такомъ же положеніи какъ въ предыдущемъ примѣрѣ. Найти какой грузъ можетъ быть положенъ на данную ея ступеньку, не нарушая равновѣсія, если наклонъ лѣстницы къ горизонту θ .

Пусть:

M данная ступенька;

W вѣсъ положеннаго на нее груза;

$$a = AM$$

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi; \quad \mu' = \operatorname{tg} \varphi'.$$

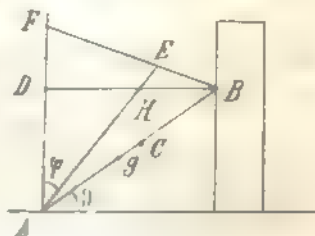
Геометрическое изслѣдованіе (фиг. 76). Возставимъ перпендикуляры AD къ полу и BD къ стѣнѣ. Пусть D точка ихъ пересѣченія. Построимъ углы: $DAE = \varphi$; $DBE = \varphi'$. Согласно § 220 равнодѣйствующія давленій и треній должны лежать внутри этихъ угловъ, и слѣдовательно точка приложенія общей равнодѣйствующей этихъ реакцій должна находиться

внутри четырехугольника $DFEH$. Пусть G есть центр тяжести совокупности груза и лестницы. Если вертикаль, проходящая чрезъ G , проходить влево отъ E , то общий вѣсъ $W + w$ можно представить себѣ приложеннымъ въ какой-либо точкѣ P находящейся внутри четырехугольника $DFEH$; потому что тогда сила $W + w$ можетъ быть разложена на силы, направленные по PA и PB , которыя могутъ быть уравновѣшены реакціями въ A и B , лежащими въ углахъ DAE и DBI . Итакъ: равновѣсіе будетъ въ томъ случаѣ, когда вертикаль, проходящая чрезъ g , пройдетъ влево отъ E .

Абсциссы x_1 и x_2 точекъ E и g , считаемыя вправо отъ A , не трудно найти, онѣ будутъ:

$$x_1 = \frac{2l (\mu \mu' \cos \theta + \mu' \sin \theta)}{\mu \mu' + 1}$$

$$x_2 = \frac{(Wa + w \cdot l) \cos \theta}{W + w}$$



Фиг. 76.

Если середина C находится вправо отъ вертикали, проходящей чрезъ E , то равновѣсіе возможно только тогда, когда грузъ лежать влево отъ этой вертикали, и когда онъ достаточно великъ.

Если C лежитъ влево отъ вертикали, проходящей чрезъ E , то грузъ W можетъ быть какой угодно величины, если онъ помѣщенъ тоже влево отъ нея. Но если онъ находится вправо отъ этой вертикали, то онъ долженъ быть *достаточно малъ* для того, чтобы G былъ тоже влево отъ вертикали, проходящей чрезъ E .

Если вертикаль, проходящая чрезъ E , находится вправо отъ B , то можно, не нарушая равновѣсія, помѣстить какой угодно грузъ на какую угодно ступеньку, лишь бы лестница выдержала этотъ грузъ.

Аналитическое решение Такъ же какъ и въ примѣрѣ 4-омъ, и при тѣхъ же обозначеніяхъ, составляемъ уравненіе

$$\xi R = R'; \quad \eta R' + R = W + w$$

$$2\eta R l \cos \theta + 2R' \cdot l \cdot \sin \theta = (Wa + w l) \cos \theta.$$

Исключивъ R и R' , получимъ:

$$\frac{2l (\xi \eta \cdot \cos \theta + \xi \cdot \sin \theta)}{\xi \eta + 1} = \frac{(Wa + w l) \cos \theta}{W + w} \quad \dots (553)$$

Условіе равновѣсія заключается въ томъ, чтобы можно было удовлетворить уравненію (553) такими величинами ξ и η , чтобы.

$$\xi < \mu, \quad \eta < \mu_1.$$

Если разсматривать уравненіе (553) какъ уравненіе геометрическаго мѣста точки (ξ, η) отнесеннаго къ прямолинейнымъ прямоугольнымъ коор-

двигателю, то (553) представляет собою гиперболу. Если эта гипербола проходит через прямоугольник, составленный точками $\xi = +\mu$; $\eta = +\mu$, то условие равновесия соблюдено, потому что тогда можно удовлетворить уравнению (553) величинами $\xi < \mu$; $\eta < \mu$. Правая часть уравнения (553) есть то, что мы обозначали через x_2 . Для того, чтобы гипербола проходила через упомянутый прямоугольник, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{2l(\xi\eta \cdot \cos \theta + \xi \cdot \sin \theta)}{\xi\eta + 1} \dots x_2,$$

была положительна при $\xi = \mu$; $\eta = \mu$. Следовательно условие равновесия будетъ

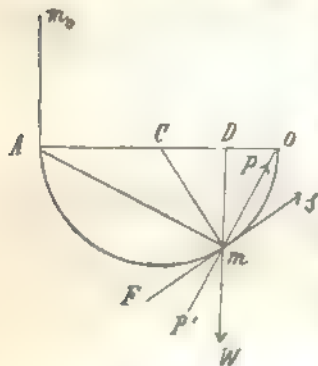
$$\frac{2l(\mu\mu' \cdot \cos \theta + \mu \sin \theta)}{\mu\mu' + 1} > x_2,$$

или

$$x_1 > x_2.$$

Въ этомъ заключалось и условие, выведенное геометрическимъ изслѣдованіемъ.

§ 224. Задача Максвелла. Матеріальная точка m , (фиг. 77) лежитъ на плоскости, поставленной подъ угломъ къ горизонту немного меньшимъ чѣмъ уголъ тренія. Ниже матеріальной точки, но не на одной съ нею линіи наибольшаго ската, сдѣлано въ плоскости отверстіе O , черезъ которое продѣта нить, прикрѣпленная къ матеріальной точкѣ. Требуется доказать, что, если тянуть весьма тихо за свободный конецъ нити, то матеріальная точка опишетъ на наклонной плоскости путь, состоящий, послѣдовательно, изъ прямой и изъ полуокружности.



Фиг. 77.

Доказательство. Пусть m какое-либо положеніе матеріальной точки, W проложеніе вѣса точки на наклонную плоскость, F' треніе. При сказанныхъ условіяхъ $F = W$. Обозначимъ черезъ P натяженіе нити. Если нить тащимъ весьма тихо, не возбуждая замѣтной ускорительной силы, то силы F , W и P должны все время быть въ равновѣсіи. Пока отверстіе O еще ниже матеріальной точки m , натяженіе P бесконечно мало и достаточно только для нарушенія равновѣсія. Поэтому m спускается по прямой наибольшаго ската. Когда m дойдетъ до горизонтали, проходящей черезъ O , то P дѣлается величиною конечною. Тогда P должна дѣлать пополамъ уголъ между P и W , при чемъ направленіе силы W не мѣняется, а F направлена по касательной къ траекторіи точки m . Опредѣленіе дальнѣйшаго пути приводится, слѣдовательно, къ опредѣленію кривой, въ которой радиусъ Om служитъ биссектрисою угла, составляемаго касательною и постояннымъ направленіемъ.

мѣтной ускорительной силы, то силы F , W и P должны все время быть въ равновѣсіи. Пока отверстіе O еще ниже матеріальной точки m , натяженіе P бесконечно мало и достаточно только для нарушенія равновѣсія. Поэтому m спускается по прямой наибольшаго ската. Когда m дойдетъ до горизонтали, проходящей черезъ O , то P дѣлается величиною конечною. Тогда P должна дѣлать пополамъ уголъ между P и W , при чемъ направленіе силы W не мѣняется, а F направлена по касательной къ траекторіи точки m . Опредѣленіе дальнѣйшаго пути приводится, слѣдовательно, къ опредѣленію кривой, въ которой радиусъ Om служитъ биссектрисою угла, составляемаго касательною и постояннымъ направленіемъ.

Такая кривая есть окружность, проходящая чрезъ точку O , находящуюся въ концѣ діаметра перпендикулярнаго къ упомянутому постоянному направленію.

Дѣйствительно (фиг. 77) въ окружности, центръ которой въ C

$$\angle CmO = \angle COm,$$

или

$$\frac{\pi}{2} - \angle BmO = \frac{\pi}{2} - \angle OAm,$$

или

$$\angle P'mF = \angle P'mW,$$

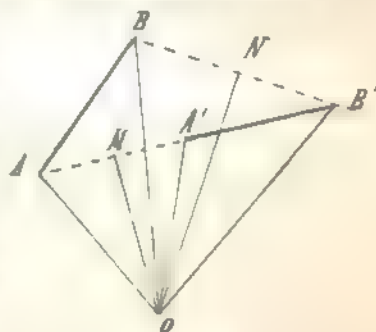
что и требуется. Итакъ, путь точки m состоитъ изъ прямой m_0A (фиг. 77) и полуокружности, построенной на діаметрѣ AO .

§ 225. Трѣнія, дѣйствующія по неизвѣстнымъ направленіямъ. Въ задачѣ Максвелла мы первый разъ встрѣтились съ вопросомъ, въ которомъ не была дава не только величина трѣнія, но и направленіе трѣнія требовалось опредѣлять, потому что предстояло опредѣлить направленіе движенія. Если направленіе движенія не опредѣлено заданіемъ, и слѣдовательно неизвѣстны и направленія трѣній, а дѣло идетъ о равновѣсіи системы, то приходится прибѣгнуть къ особымъ методамъ, основаннымъ на теоремѣ Шаля, имѣющей капитальное значеніе въ прикладной кинематикѣ.

§ 226. Теорема Шаля: Всякое перемѣщеніе плоской фигуры въ ея плоскости изъ одного положенія въ другое можетъ быть произведено безчисленнымъ множествомъ способовъ; но всегда можно достигнуть этого перемѣщенія вращеніемъ фигуры около нѣкоторой оси, называемой осью перемѣщенія (фиг. 78).

Пусть A и B суть двѣ точки фигуры въ 1-омъ ея положеніи, A' , B' эти же точки фигуры во 2-омъ ея положеніи. Соединимъ A съ A' и поставимъ къ прямой AA' изъ ея середины перпендикуляръ MO . Соединимъ B съ B' и возставимъ къ ней изъ ея середины N перпендикуляръ. Пересѣченіе O этихъ перпендикуляровъ и будетъ проекціею оси перемѣщенія на перпендикулярную къ ней плоскость фигуры (фиг. 78).

Дѣйствительно, разстояніе AB между точками фигуры остается неизмѣннымъ, такъ что $AB = A'B'$. Кромѣ того изъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ слѣдуетъ: $OA = OA'$, $OB = OB'$. Слѣдовательно треугольники AOB и $A'OB'$ равны, и треугольникъ AOB можно перемѣстить вращеніемъ около O изъ положенія AOB въ положеніе $A'OB'$, при чемъ (этимъ вращеніемъ) AB перемѣстится въ положеніе $A'B'$. Что и требовалось доказать.



Фиг. 78.

§ 227. Первый способ рѣшенія задачъ на тренія, направленія которыхъ не даны. Такого рода задачи состоятъ въ слѣдующемъ. Дано тяжелое тѣло опирающееся n точками $A_1, A_2 \dots A_n$ на горизонтальную плоскость, производя въ этихъ точкахъ давления $P_1, P_2 \dots P_n$. Пусть коэффициенты тренія въ этихъ точкахъ будутъ $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \dots \mu_n$. На тѣло дѣйствуютъ пара и сила, при чемъ всѣ силы параллельны горизонтальной плоскости.

Если будемъ разсматривать предѣльный случай, когда силы настолько велики, что тѣло едва не приходитъ въ движеніе и если намъ удастся выйти тотъ центр C перемѣщенія, около котораго тѣло начало бы вращаться, еслибы оно пришло въ движеніе, то направленія треній опредѣлятся, потому что при вращеніи около C всѣ точки $A_1, A_2, A_3 \dots$ будутъ перемѣщаться по дугамъ окружностей радиусовъ $CA_1, CA_2, CA_3 \dots$, тренія же будутъ дѣйствовать въ сторону противоположную этимъ перемѣщеніямъ.

Пусть:

L моментъ заданной пары,

X, Y слагающія заданной силы,

(x_k, y_k) координаты точки A_k ,

$r_k = CA_k$

(ξ, η) координаты центра перемѣщенія,

и положимъ, что заданныя силы стремятся повернуть тѣло въ направленіи противоположномъ движенію стрѣлки часовъ.

Разложеніе треній по направленіямъ осей координатъ упростится, если мы повернемъ всѣ тренія около точекъ ихъ приложенія въ одну сторону на углы равные прямому углу. Тогда всѣ тренія направятся по прямымъ $CA_1, CA_2, CA_3 \dots$ по направленію, положимъ, отъ C . Чтобы имѣть право на такой поворотъ треній мы должны помнить, что теперь проложеніе каждаго повернутого тренія на ось x равно проложенію неповернутого тренія на ось y и входитъ въ составъ силъ уравнивающихъ Y , точно такъ же проложеніе каждаго повернутого тренія на ось y равно проложенію неповернутого тренія на ось x и входитъ въ составъ силъ уравнивающихъ $(-X)$. Поэтому, и вслѣдствіе того, что тренія равны $P_1\mu_1, P_2\mu_2, P_3\mu_3 \dots$, получимъ для равновѣсія силъ:

$$\sum \mu P \frac{(\xi - x)}{r} + Y = 0 \dots \dots \dots (354)$$

$$\sum \mu P \frac{(\eta - y)}{r} - X = 0 \dots \dots \dots (355)$$

Для равновѣсія моментовъ паръ не нужно повертывать тренія. Равенство нулю статическихъ моментовъ относительно C будетъ таково.

$$\sum \mu Pr + Y \cdot \xi - X \cdot \eta - L = 0 \dots \dots \dots (356)$$

Здѣсь мы предположили, что центр перемѣщенія C не совпадаетъ ни съ одной изъ точекъ $A_1, A_2 \dots$ прикасающихся къ плоскости. Если C

совпадает, напримеръ съ A_k , то называя проложенія тренія въ A_k на ось чрезъ F'_k и E'_k получимъ уравненія равновѣсія, замѣняя въ (554), (555) и (556) (ξ, η) чрезъ (x_k, y_k) , $\mu_k P_k$ y_k r_k и $\mu_k P_k$ x_k r_k чрезъ F'_k и E'_k и уничтожая членъ $\mu_k P_k r_k$.

§ 228. Второй способъ рѣшенія задачъ на тренія по неопредѣленнымъ направленіямъ. Моментъ относительно C всѣхъ силъ и всѣхъ треній (обозначимъ его чрезъ p) равенъ

$$p = \sum P r + Y \xi - X \eta - L \dots \dots \dots (557)$$

если координаты точки C суть (ξ, η) . Этотъ моментъ измѣняется въ направленіи момента треній. Если p отрицательно, то моментъ силъ болѣе момента треній и тѣло начнетъ вращаться. Если p положительно, то моментъ треній болѣе момента силъ, и тѣло можетъ быть удержано въ покоѣ даже меньшими треніями, чѣмъ предѣльныя тренія. Положимъ, что мы нашли такое положеніе точки C , при которомъ p принимаетъ *наименьшую* величину. Если p положительно или равно нулю при этой наименьшей величинѣ, то не существуетъ центра перемѣщенія C' , около котораго тѣло могло бы начать вращаться. Если же минимальное p отрицательно, то существуетъ центръ перемѣщенія именно въ той точкѣ C , для которой p *минимален*.

Для опредѣленія *минимума* p нужно приравнять производныя отъ (557) по ξ и по η нулю. Но при этомъ, благодаря равенству

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

мы какъ разъ и получимъ уравненія (554) и (555).

Посмотримъ теперь, какое значеніе имѣютъ эти уравненія (554) и (555). Представимъ себѣ ось перемѣщенія C какъ неподвижную ось вращенія и обозначимъ проложенія производимаго на нее тѣломъ давленія чрезъ R_x и R_y . Тогда, при равновѣсїи, должны быть равны нулю суммы проложеній заданныхъ силъ, тренія и давленій. Но (554) и (555) показываютъ, что суммы проложеній заданныхъ силъ и треній равны нулю. Следовательно

$$R_x = 0; \quad R_y = 0.$$

Уравненія (554) и (555) показываютъ, что на неподвижную ось C не существуетъ давленія, если она выбрана такъ, что по отношенію къ ней p принимаетъ минимальное значеніе:

Итакъ: ось C , около которой тѣло начинаетъ вращаться, определяется *нахожденіемъ минимума момента* p ; *условіе же, при исполненіи котораго заданныя силы сама по себѣ достаточны для приведенія тѣла въ движеніе, получается приравненіемъ нулю найденной минимальной величины момента* p .

Примѣръ I. Треугольный столъ стоитъ ножками, прикрепленными къ трѣмъ вершинамъ треугольника, на горизонтальномъ полу. Найти наи-

меньшую пару, которая при существовании трения между ножками и поломъ, была бы способна повернуть столъ. Если вѣсъ всего стола W , то давленіе каждой ножки о полъ равно $\frac{W}{3}$ и треніе каждой ножки равно $\mu \frac{W}{3}$.

Положимъ, что центръ перемѣщенія O не совпадаетъ ни съ однимъ изъ концовъ A, B, C ножекъ. Такъ какъ задава только пара и, слѣдовательно, тренія должны уравнивать пару, то они могутъ быть повернуты всѣ въ одну сторону на прямой уголъ, и мы имѣемъ право считать ихъ дѣйствующими по направленіямъ AO, BO, CO не нарушая равновѣсія (см. § 224). Мы должны имѣть равновѣсіе силъ и равновѣсіе моментовъ.

Равновѣсіе силъ заключается въ равновѣсіи повернутыхъ треній дѣйствующихъ по AO, BO, CO ; чтобы оно было, необходимо, чтобы центръ перемѣщенія O лежалъ внутри треугольника ABC . Такъ какъ тренія эти взаимно равны, то углы AOB, BOC, COA должны быть взаимно равны. Поэтому каждый изъ нихъ равенъ 120° . Итакъ: если каждый изъ угловъ треугольника менѣе 120° , то центръ перемѣщенія лежитъ на пересѣченіи двухъ дугъ окружностей, построенныхъ на двухъ сторонахъ треугольника и вмѣщающихъ уголъ 120° .

Равновѣсіе моментовъ показываетъ, что моментъ наименьшей пары, которая въ состояніи повернуть столъ, равенъ

$$\mu \frac{W}{3} (AO + BO + CO).$$

Положимъ теперь, что центръ перемѣщенія совпадаетъ съ концомъ одной изъ ножекъ, наиримѣръ съ C .

Повернувъ тренія на прямой уголъ замѣтимъ, что треніе въ C должно уравнивать двѣ силы, идущія по AC и BC и равная каждой $\frac{1}{3} \mu W$. Равнодѣйствующая этихъ силъ равна

$$\frac{1}{3} \mu W \cdot 2 \cos \left(\frac{C}{2} \right).$$

Но треніе въ C равно $\frac{1}{3} \mu W$. Слѣдовательно, эта равнодѣйствующая не можетъ быть больше $\frac{1}{3} \mu W$: Поэтому уголъ C долженъ быть больше 120° . Итакъ: столъ можетъ повернуться около одной изъ ножекъ только въ томъ случаѣ, если уголъ треугольника при этой ножкѣ $> 120^\circ$. Въ этомъ случаѣ моментъ наименьшей вращающей пары равенъ

$$\frac{1}{3} \mu W (CA + CB).$$

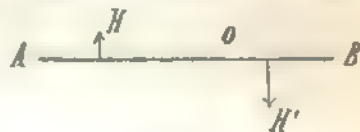
если столъ повертывается около C .

Примѣръ 2. Однородная палка AB лежитъ на горизонтальномъ столѣ, опираясь на него равномерно восемью точками соприкасающимися

со столомъ. Найти наименьшую силу, которая, будучи приложена къ концу A перпендикулярно къ палкѣ и въ горизонтальномъ направленіи, были бы въ состояніи сдвинуть палку съ мѣста.

Пусть: l длина палки, w вѣсъ единицы ея длины. Каждый элементъ палки производитъ давленіе $w \cdot dx$. Предѣльное треніе на элементъ равно $\mu \cdot w \cdot dx$. Если центръ перемѣщенія находится въ O , то тренія направлены по перпендикулярамъ, возставленнымъ къ палкѣ изъ ея элементовъ, и всѣ тренія должны уравновѣшиваться силою P , приложенною въ A .

Положимъ, что центръ перемѣщенія лежитъ въ сторонѣ отъ палки. Повернувъ всѣ тренія въ одну сторону на прямой уголъ, такъ чтобы всѣ они были направлены къ O , замѣтимъ, что всѣ они должны уравновѣшиваться силою P дѣйствующею параллельно палкѣ (P тоже повернута). Но это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если O лежитъ на палкѣ. Итакъ центръ перемѣщенія O долженъ лежать на направленіи палки.



Фиг. 79.

Положимъ, слѣдовательно, что O лежитъ на AB и обозначимъ AO чрезъ x ; тогда вповернутыя тренія въ элементахъ H и H' перпендикулярны къ AB и направлены какъ показано на чертежѣ (фиг. 79). Равнодѣйствующія этихъ трений приложены въ центрахъ тяжести отрезковъ AO и BO и равны:

$$\begin{aligned} \mu wx \\ \mu w(l-x). \end{aligned}$$

Равновѣсіе силъ и равновѣсіе паръ дадутъ:

$$\begin{aligned} \mu wx - \mu w(l-x) &= P \\ \mu wx^2 &= \mu w(l^2 - x^2). \end{aligned}$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ $x \mid 2 = l$. Первое даетъ:

$$P = \mu \cdot w \cdot (\sqrt{2} - 1).$$

ГЛАВА IV.

Начало возможныхъ перемѣщеній.

§ 229. Общее выраженіе начала возможныхъ перемѣщеній. Въ § 67 мы показали, въ чемъ состоитъ начало возможныхъ перемѣщеній для равновѣсія одной точки, затѣмъ въ § 127 мы примѣнили его, безъ оговорокъ, къ выводу общаго уравненія механики.

Начиная еще съ Лагранжа было дано много доказательствъ справедливости этого начала въ приложеніи его къ какимъ угодно системамъ,

но всё эти доказательства возбуждали возражения. Этот недостаток чисто формального характера, и даже частный случай общего уравнения (начало сохранения живой силы) служить краеугольным камнем всей современной физики и признается одною из достовернейших истин, благодаря огромному числу фактов, ее подтверждающих и отсутствию фактов противоречащих, вследствие чего как начало возможных перемещений в применении к системѣ, так и выводимое из него общее уравнение механики такъ же достоверны какъ основные законы Ньютона, выведенные тоже изъ наблюдений фактовъ.

Въ настоящей главѣ мы подробно остановимъ и на началѣ возможныхъ перемещений и применимъ его къ равновѣсью неизмѣняемой системы, для которой оно можетъ быть доказано съ достаточною убѣдительностью.

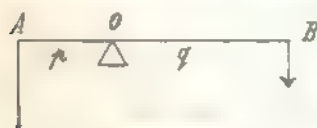
Самымъ общимъ образомъ можно выразить начало возможныхъ перемещений такъ:

Положимъ, что силы P_1, P_2, \dots дѣйствуютъ на точки A_1, A_2, \dots системы данныхъ тѣлъ. Некоторые изъ этихъ тѣлъ могутъ быть соединены связями и производить другъ на друга дѣйствія и противодействія. Положимъ затѣмъ, что система весьма мало перемѣстилась, такъ что точки A_1, A_2, \dots заняли соотвѣтныя положенія: A'_1, A'_2, \dots . Пусть dp_1, dp_2, \dots суть проекціи на направленіи силъ P_1, P_2, \dots перемѣщений $A_1, A'_1, A_2, A'_2, \dots$. Пусть $dU = P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \dots$. Система находится въ равновѣсїи, если $dU = 0$ для всякихъ малыхъ перемѣщений возможныхъ, то есть не противорѣчащихъ геометрическимъ условіямъ связей. Наоборотъ, система не находится въ равновѣсїи, если, для какого-нибудь возможнаго ея перемѣщенія, dU не равняется нулю.

Произведение $P dp$ есть работа силы P на пути того возможнаго перемѣщенія точки A , проекція котораго на P равна dp . Ее называютъ иногда *возможнымъ моментомъ* (moment virtuel) или *возможною работою* (travail virtuel).

§ 230. Приложение начала возможныхъ перемещений къ теоріи рычага.

Для поясненія дѣла приложимъ начало возможныхъ перемещений къ простому и хорошо извѣстному изъ элементарной физики примѣру.



Фиг. 80.

Положимъ, что имѣемъ рычагъ, способный вращаться безъ тренія около оси O (фиг. 80). Въ точкахъ A и B приложены къ нему силы P и Q . Спрашивается,

какое отношеніе должно существовать между плечами $OA = p$; и $OB = q$ для того, чтобы рычагъ находился въ равновѣсїи?

Рычагъ можетъ совершать бесчисленныя перемѣщенія, вращаясь около оси O . Но для начала возможныхъ перемѣщений важны только малыя перемѣщенія.

Возможныя малыя перемѣщенія для рычага заключаются въ томъ, что онъ можетъ повернуться на уголъ $d\varphi$ въ ту или другую сторону. Положимъ, что онъ отклонился на уголъ $d\varphi$ въ такую сторону, что точка A перемѣстилась вверхъ. Это перемѣщеніе точки A равно дугѣ $p \cdot d\varphi$. Точка B перемѣстится при этомъ книзу на дугу $q d\varphi$. Если перемѣщеніе книзу считаемъ положительнымъ, то перемѣщеніе вверхъ приходится считать отрицательнымъ. Поэтому возможныя перемѣщенія точекъ приложенія силъ будутъ:

$$p \cdot d\varphi \text{ для точки } A \\ - q \cdot d\varphi \text{ для точки } B.$$

Работы на пути этихъ перемѣщеній будутъ:

$$P \cdot p d\varphi = \text{работа силы } P \\ - Q \cdot q d\varphi = \text{работа силы } Q.$$

Согласно началу возможныхъ перемѣщеній сумма этихъ возможныхъ работъ должна быть равна нулю. Следовательно:

$$P p d\varphi - Q q d\varphi = 0$$

или, по сокращеніи на $d\varphi$:

$$P p = Q q \dots \dots \dots (558)$$

Итакъ, мы вывели изъ начала возможныхъ перемѣщеній уравненіе (558), выражающее известный законъ рычага, выражающій, что для равновѣсія рычага необходимо, чтобы статические моменты силъ были равны. Это уравненіе (558) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} \dots \dots \dots (559)$$

силы обратно пропорціональны плечамъ рычага.

§ 231. Примѣненіе начала возможныхъ перемѣщеній въ практической механикѣ. Законъ рычага можно выразить слѣдующимъ образомъ. При перемѣщеніи рычага на уголъ $d\varphi$ одинъ конецъ его описываетъ большую, другой меньшую дугу: возможное перемѣщеніе одного конца больше чѣмъ другого. Для равновѣсія приложенныя къ этимъ концамъ силы должны быть обратно пропорціональны ихъ возможнымъ перемѣщеніямъ. Чѣмъ меньше возможное перемѣщеніе точки рычага, тѣмъ большую силу нужно къ ней приложить для равновѣсія.

Въ практической механикѣ начало возможныхъ перемѣщеній изобавляетъ иногда отъ многихъ вычисленій. Практики выражаютъ его иногда въ такой формѣ: «проигрывая въ пространствѣ, выигрываемъ въ силѣ». Это выраженіе не отличается точностью. Выразимъ нѣсколько точнѣе на опредѣленномъ примѣрѣ, что хотятъ сказать этими словами.

Положимъ, что имѣемъ сколь угодно сложный механизмъ, состоящій изъ рычаговъ, зубчатыхъ колесъ и шкивовъ съ перекинутыми безконеч-

ными ремнями, только такой, что каждому положенію точки A механизма соответствует свое, вполне определенное положеніе точки B . Положимъ, что, при прохожденіи точкою A весьма малаго пути Aa , точка B проходитъ весьма малый путь Bb . На основаніи начала возможныхъ перемѣщеній силы P и Q , приложенныя въ точкахъ A и B механизма по направленію этихъ путей уравниваются, въ отсутствіи треній въ томъ случаѣ, если онѣ обратно пропорциональны длинамъ этихъ путей.

Это начало, какъ и принципъ сохраненія энергии, убѣждаетъ насъ въ томъ, что никакимъ механизмомъ нельзя создать энергии изъ ничего. можно только разнообразить отношенія между силами и путями, проходящими тѣми точками механизма, въ которыхъ эти силы приложены.

§ 232. Доказательство начала возможныхъ перемѣщеній для свободного абсолютно-твердаго тѣла.

Теорема I. *Работа силъ, дѣйствующихъ на одну точку, равна работѣ равнодѣйствующей этихъ силъ.*

Если нѣсколько силъ дѣйствуютъ на одну точку A и заставляютъ ее перемѣститься въ A' , то каждая изъ силъ производитъ работу. Работою всей совокупности силъ называется сумма работъ, произведенныхъ каждою изъ силъ. Работа произведенная одною силою P равна, согласно опредѣленію, произведенію перемѣщенія AA' на проекцію P по направленію AA' . Поэтому работа всѣхъ силъ равна произведенію AA на проекцію всѣхъ силъ по направленію AA' . Следовательно она равна произведенію AA' на проекцію равнодѣйствующей по направленію AA' . Итакъ: работа силъ, дѣйствующихъ на точку, равна работѣ ихъ равнодѣйствующей.

Теорема II. *Работа силы, дѣйствующей на абсолютно-твердое тѣло, не мѣняется, если точка приложенія силы переносится въ другую точку тѣла, лежащую на направленіи силы.* Положимъ (фиг. 81), что въ абсолютно-твердомъ тѣлѣ сила F переносится изъ точки приложенія



Фиг. 81.

A въ точку приложенія B того же тѣла, находящуюся на направленіи силы F . Пусть $A'B'$ есть второе положеніе прямой AB весьма близкое къ первому, принимаемое прямою AB подъ дѣйствіемъ данныхъ силъ на тѣло. Опустимъ перпендикуляры $A'M$ и $B'N$ на AB . Работа силы F , согласно съ опредѣленіемъ этого понятія, равна $F \cdot AM$. Работа перенесенной силы F' равна $F' \cdot BN$. Такъ какъ AB' составляетъ съ AB безконечно малый уголъ,

то можно принять косинусъ этого угла равнымъ единицѣ. Тогда:

$$MN = A'B' = AB.$$

Слѣдовательно:

$$BN = AM.$$

Поэтому:

$$F \cdot \overline{AM} = F \cdot BN,$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствіе. Изъ этихъ двухъ теоремъ слѣдуетъ, что работа дѣйствующихъ силъ при данномъ перемѣщеніи не измѣняется отъ того, что будутъ приложены къ тѣлу еще равныя и противоположныя силы.

Теорема III. *Работа совокупности силъ, дѣйствующихъ на абсолютно-твердое тѣло, не измѣняется отъ того или другого приведенія этой совокупности силъ по правиламъ статики къ простѣйшимъ системамъ силъ и паръ.* Статическое приведеніе силъ, дѣйствующихъ на неизмѣняемую систему, изложенное въ §§ 90—104, все состоитъ изъ трехъ процессовъ: 1) сложения и разложенія силъ; 2) перенесенія ихъ точекъ приложения по ихъ направленіямъ и 3) присоединенія или отнятія силъ равныхъ и противоположныхъ.

Согласно доказаннымъ въ настоящемъ параграфѣ теоремамъ и слѣдствію ни одинъ изъ этихъ процессовъ не измѣняетъ работы совокупности дѣйствующихъ силъ. Слѣдовательно, эта работа не измѣняется отъ того или другого приведенія силъ.

Слѣдствіе. Поэтому: *работа данной совокупности силъ, дѣйствующихъ на абсолютно-твердое тѣло, равна суммѣ работъ равнодѣйствующей силы и равнодѣйствующей пары (см. § 92).*

Главная теорема. *Если совокупность силъ, дѣйствующихъ на абсолютно-твердое тѣло, находится въ равновѣсіи, то сумма $P_1 dr_1 + P_2 dr_2 + \dots$ возможныхъ работъ равна нулю.* Если совокупность силъ находится въ равновѣсіи, то и равнодѣйствующая сила R равна нулю, и моментъ G равнодѣйствующей пары равенъ нулю (см. §§ 92 и 105). Но въ такомъ случаѣ, согласно слѣдствію теоремы III-ей, работа $P_1 dr_1 + P_2 dr_2 + \dots$ всей совокупности силъ равна нулю. Эту работу мы обозначили въ § 229 чрезъ dU . Итакъ, начало возможныхъ перемѣщеній въ приложеніи къ свободному абсолютно-твердому тѣлу, доказано: если тѣло находится въ равновѣсіи, то $dU = 0$.

Обратная теорема. *Если сумма возможныхъ работъ равна нулю, для всякаго возможнаго перемѣщенія абсолютно твердаго тѣла, то тѣло находится въ равновѣсіи.* Если сумма возможныхъ работъ равна нулю, то; согласно сказанному въ настоящемъ параграфѣ, сумма работъ равнодѣйствующей силы R и равнодѣйствующей пары G равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія. Докажемъ, что если эта работа равна нулю, то и самыя R и G равны, порознь, нулю.

Мы можемъ всегда, согласно § 98-му, сдѣлать приведеніе такъ, чтобы плоскость пары G была перпендикулярна къ силѣ R . Такъ какъ сумма работъ силы R и пары G равна нулю для всякаго перемѣщенія, то она равна нулю и для такого перемѣщенія, при которомъ тѣло, оставаясь параллельнымъ своему начальному положенію перемѣщается на путь dr

параллельно R . Но это перемещение перпендикулярно къ силамъ составляющимъ пару G . Следовательно работа пары равна нулю. Если сумма работъ силы R и пары G равна нулю и работа пары G въ отдѣльности равна нулю, то и работа $R\delta r$ силы въ отдѣльности должна быть равна нулю при томъ, что δr не равно нулю. Следовательно $R = 0$.

Такъ какъ сумма работъ силы R и пары G равна нулю для всякаго возможнаго перемѣщенія, то она равна нулю и для такого перемѣщенія, при которомъ тѣло поворачивается на уголь $d\omega$ около K въ сторону, указанную силами, составляющими пару. Если плечо пары AB , то перемѣщенія точекъ A и B приложения ея силъ будутъ направлены по этимъ силамъ (безконечно малыя дуги) и равны, каждое порознь, $\frac{1}{2} AB \cdot d\omega$. Работа же всей пары будетъ $AB \cdot Q \cdot d\omega = G \cdot d\omega$. При сказанномъ перемѣщеніи тѣла точка приложения силы R не перемѣщается; поэтому работа силы R равна нулю. Следовательно, при указанномъ равенствѣ нулю суммы работъ силы R и пары G — работа пары G равна нулю, для $G \cdot d\omega = 0$. Но $d\omega$ не равно нулю. Следовательно $G = 0$.

Итакъ: $R = 0$, $G = 0$. Если же они порознь равны нулю, то тѣло находится въ равновѣсїи, что и требовалось доказать.

§ 233. Доказательство теоремы обратной началу возможныхъ перемѣщеній, для системы абсолютно-твердыхъ тѣлъ.

Теорема: Система находится въ покой; дано, что работа внешнихъ силъ равна нулю для всякихъ весьма малыя перемѣщений системы изъ этого положенія, согласуемыхъ съ данными связями. Требуется доказать, что система находится въ равновѣсїи.

Еслибы система не была въ равновѣсїи, то она пришла бы въ движеніе. Представимъ себѣ всякія возможныя совокупности путей всѣхъ точекъ системы. Изберемъ одну изъ такихъ совокупностей путей. Помощью гладкихъ кривыхъ можемъ поставить систему въ такія условия, что точки ея будутъ въ состояніи двигаться только по избранной совокупности путей. Такъ, напримѣръ, если какая-нибудь кривая представляетъ собою одинъ изъ путей избранной совокупности, по которому можетъ двигаться одна изъ точекъ системы, то, взявъ неподвижную абсолютно твердую и гладкую проволоку, имѣющую видъ этой кривой и надѣвъ на нее, очень тонкое кольцо, соединенное съ точкою движущейся по этой кривой, и сдѣлавъ то же самое съ другими точками системы, мы поставимъ систему въ такія условия, что ея точки могутъ свободно двигаться только по избранной совокупности путей. Противодѣйствія этихъ проволокъ равны дѣйствіямъ на нихъ движущихся по нимъ точекъ и противоположны этимъ дѣйствіямъ, а потому работа этихъ дѣйствій и противодѣйствій равна нулю и проволоки не влияют на величину разсматриваемой возможной работы. Теперь уже достаточно одной силы F приложенной въ какой-нибудь точкѣ A системы для того, чтобы удержать систему отъ

перемѣщенія изъ положенія покоя. Эта сила F должна имѣть направле-
ніе противоположное тому, по которому точка A двигалась бы, еслибы
не было силы F . Теперь силы, приложенныя къ системѣ, уравновѣши-
ваются силою F . Если система движется по единственно доступнымъ ей
путямъ и точка A перемѣстится при этомъ въ A' , то сумма работъ при-
ложенныхъ къ системѣ силъ, плюсъ работа силы F , должна быть равна
нулю. Но дано, что сумма работъ приложенныхъ къ системѣ силъ равна
нулю. Ея работа равна $(-AA' \cdot F)$, а перемѣщеніе AA' произвольно.
Слѣдовательно $F = 0$. Итакъ, не нужно никакой силы F для удержанія
системы въ покой. Слѣдовательно система находится въ равновѣсіи, что
и требовалось доказать.

Замѣтимъ, что въ доказательствѣ этомъ мы предполагали, что всѣ
силы, дѣйствующія на систему, приняты во вниманіе, то есть и тренія
(если они предполагаются существующими), и реакции связей. Можно не
вводить въ уравненіе $dU = 0$ только такія силы, или совокупности силъ,
работа которыхъ равна нулю, напримѣръ, давленіе на ось гѣла вращаю-
щагося около неподвижной оси, потому что точка приложенія такой силы
неподвижна, и потому работа силы равна нулю; натяженіе нерастяжимой
нити, на концахъ которой прикрѣплены двѣ точки системы,—потому что
совокупность работъ дѣйствія и противодѣйствія равна нулю.

§ 234. Начальное движеніе системы. Теорема: *Находящаяся въ
покоѣ система начинаетъ движеніе, подъ вѣдѣніемъ приложенныхъ къ
ней силъ, всегда такъ, что работа силъ въ начальномъ перемѣщеніи по-
ложительна.* Справедливость этой теоремы видна изъ того, что въ при-
ложеніи къ начинающемуся движенію уравненіе (396) живыхъ силъ при-
нимаетъ видъ:

$$\sum \frac{mv^2}{2} = T$$

величина же $\sum \frac{mv^2}{2}$, какъ сумма квадратовъ помноженныхъ на половины
массъ, всегда положительна.

Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что для обезпеченія равновѣсія *оста-
точно*, чтобы сумма возможныхъ работъ для всѣхъ возможныхъ перемѣ-
щеній была не больше нуля; потому что, согласно только-что доказан-
ному, только положительная сумма работъ существуетъ при выходѣ си-
стемы изъ покоя, какъ это видно изъ (183).

Работа силъ P равна работѣ ихъ продолженій, такъ что.

$$\sum Pdp = \sum (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Поэтому начало возможныхъ перемѣщеній можетъ быть выражено
формулою:

$$\sum (Xdx + Ydy + Zdz) \leq 0 \quad \dots \dots \dots (560)$$

согласно съ 183.

Если движение возможно только въ одну сторону по связямъ, то достаточнымъ условіемъ равновѣсія будетъ:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) < 0$$

если же движение возможно по связямъ въ обѣ стороны, то условіе равновѣсія будетъ:

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

На этомъ чаще встрѣчающемся условіи мы и остановимся.

§ 235. Координаты твердаго тѣла. Для опредѣленія положенія неизмѣнной системы вѣтъ необходимости знать координаты всѣхъ ея точекъ: достаточно знать координаты x, y, z одной какой-нибудь точки системы, два угла, составляемые съ осями x и y какою-либо данною прямою системы и уголъ, составляемый какою нибудь данною неподвизною плоскостью съ данною плоскостью системы, проходящею чрезъ упомянутую прямую. Итого, нужно знать 6 координатъ: x, y, z , два угла прямой и уголъ между плоскостями.

Эти 6 величинъ, или другія какія-либо 6 величинъ, опредѣляющія положеніе неизмѣняемой системы, называются ея координатами.

Если система состоитъ изъ нѣсколькихъ точекъ или нѣсколькихъ тѣлъ, то тѣ величины, которыми опредѣляется положеніе системы, называются ея координатами.

§ 236. Независимыя координаты. Если положеніе системы опредѣляется декартовыми координатами всѣхъ ея точекъ, и если свобода движеній ея ограничена связями, то связи эти выражаются уравненіями, дающими зависимость между нѣкоторыми изъ этихъ координатъ.

Положимъ, что система содержитъ n точекъ и дано k связей. Для каждой точки существуютъ 3 декартовы координаты x, y, z . Слѣдовательно для всей системы существуетъ $3n$ координатъ. Изъ нихъ k координатъ могутъ быть исключены при помощи k уравненій связей и остается $(3n - k)$ координатъ, которыя уже будутъ независимы другъ отъ друга.

Эти $(3n - k)$ независимыя другъ отъ друга координаты, или $(3n - k)$ величинъ, ихъ замѣняющихъ, называются независимыми координатами системы при данныхъ связяхъ.

Примѣръ 1. Точка движется на сферѣ. Положеніе точки опредѣляется 3-мя декартовыми координатами (x, y, z) . Но при данной связи (сфера) вполне достаточно, для опредѣленія положенія точки на сферѣ, 2-хъ географическихъ координатъ: долготы λ и широты φ .

Примѣръ 2-й. Точка движется по прямой

$$Ax + By + Cz = D$$

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1,$$

Положеніе точки опредѣляется 3-мя декартовыми координатами (x, y, z) . Но при движеніи по этой прямой, для опредѣленія положенія точки,

достаточно знать одну координату. А именно: изъ уравненій данной прямой опредѣляемъ

$$x = \frac{B_1(D - C_2) - B(D_1 - C_1)}{AB_1 - A_1B}$$

$$y = \frac{A(D' - C_1) - A'(D - C_2)}{AB_1 - A_1B}$$

Теперь ясно, что для опредѣленія положенія точки на прямой достаточно знать x , по которому сейчасъ же опредѣлятся x и y по выведеннымъ формуламъ.

Примѣръ 3. Прямая AB имѣетъ неподвижную точку въ началѣ координатъ и можетъ вращаться около этой точки, оставаясь постоянно въ плоскости (x, y) .

Хотя каждая точка прямой опредѣляется 3-ми декартовыми координатами. Но положеніе прямой вполне опредѣляется угломъ φ , образуемымъ ею съ осью x . Уголъ φ и будетъ независимой координатою прямой, подчиненной такимъ условіямъ.

§ 237. Степени свободы системы Число независимыхъ координатъ, которыми опредѣляется положеніе системы, называется *степенями свободы* этой системы при данныхъ связяхъ. Такимъ образомъ:

Степень свободы свободной точки = 3

Степень свободы точки, не покидающей данной поверхности = 2.

Степень свободы свободного абсолютно твердаго тѣла = 6;

Степень свободы абсолютно твердаго тѣла имѣющаго 1 неподвижную точку = 3;

Степень свободы абсолютно твердаго тѣла вращающагося около неподвижной оси = 1,
и такъ далѣе.

§ 238. Максимумъ и минимумъ силовой функціи Если элементарная работа $\Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$ представляетъ собою полный дифференціалъ какой-нибудь функціи U , такъ что

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz) = dU,$$

то, согласно § 133, эта функція U называется силовой функціею.

Согласно началу возможныхъ перемещеній, при равновѣсіи системы.

$$dU = 0 \quad \dots \quad (561)$$

По правиламъ же дифференціального исчисленія (561) представляетъ собою уравненіе, изъ котораго опредѣляются максимальныя или минимальныя значенія для U , или такія значенія координатъ, для которыхъ (и въ ихъ соотвѣствіи) $U = const$.

Итакъ: если дана силовая функція U , то, для опредѣленія положенія равновѣсія системы, опредѣляемъ ея координаты такъ, чтобы U было максимумъ или минимумъ.

Въ положеніи равновѣсія системы силовая функція U достигаетъ своей максимальной или минимальной величины, или $U = \text{const}$ въ положеніяхъ системы соотвѣствующихъ ей положеніямъ равновѣсія.

§ 239. Устойчивость равновѣсія системы Теоремы Дирикле. Разсмотримъ послѣдовательно 3 случая.

1) U имѣетъ максимальную величину, то есть U уменьшается при всякомъ возможномъ перемѣщеніи въ соотвѣствующее положеніе.

Помѣстимъ систему въ одно изъ такихъ соотвѣствующихъ положеній и предоставимъ ей двигаться, выходя изъ покоя подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Согласно § 234 она начнетъ двигаться такъ, что элементарная работа dU будетъ положительна. Но, когда dU положителенъ, то U возрастаетъ. Поэтому система будетъ приближаться къ положенію равновѣсія, въ которомъ U *максимумъ*. Итакъ, въ этомъ случаѣ, положеніе равновѣсія *устойчивое*.

2) U имѣетъ минимальную величину, то есть U увеличивается при всякомъ возможномъ перемѣщеніи въ соотвѣствующее положеніе.

Помѣстимъ систему въ одно изъ такихъ соотвѣствующихъ положеній и предоставимъ ей двигаться, выходя изъ покоя, подъ вліяніемъ данныхъ силъ. Согласно § 234 она начнетъ двигаться такъ, что dU будетъ положительно. Но когда dU положителенъ, то U возрастаетъ. Поэтому система еще болѣе будетъ удаляться отъ положенія равновѣсія, въ которомъ U *минимумъ*. Итакъ, въ этомъ случаѣ, положеніе равновѣсія *неустойчивое*.

3) $U = \text{const}$ для всѣхъ перемѣщеній системы изъ положенія равновѣсія въ соотвѣствующія положенія. Въ этомъ случаѣ равновѣсіе *безразличное*.

§ 240. Высота центра тяжести, соотвѣствующая равновѣсію. Положимъ, что на систему дѣйствуетъ только одна вѣнющая сила—тяжесть.

Пусть z_1, z_2, \dots суть высоты точекъ системы надъ горизонтальною плоскостью (x, y) .

m_1, m_2, \dots массы этихъ точекъ.

z высота центра тяжести системы.

Согласно (242) имѣемъ:

$$\sum z m = \sum m z$$

$$dU = - \sum m g dz = - g \sum m dz$$

$$U = - z g \cdot \sum m + C.$$

Слѣдовательно

U *максимумъ* при z *минимумъ*, устойчивое равновѣсіе;

U *минимумъ* при z *максимумъ*, неустойчивое равновѣсіе;

Итакъ: Если система находится подъ вліяніемъ только тяжести и тѣхъ реакцій, которыя не входятъ въ уравненіе, выражающее начало возможныхъ перемѣщеній, то возможныя положенія равновѣсія соотвѣт-

определить максимальной или минимальной высоту центра тяжести или такую его положенію, по выводу изъ которой его высота не мѣняется. Равновѣсіе будетъ устойчивое при минимальной высотѣ центра тяжести и неустойчивое при максимальной его высотѣ. Максимумъ и минимумъ находится по правиламъ дифференціальнаго исчисленія.

Примѣръ 1. Физическій маятникъ находится въ устойчивомъ положеніи равновѣсія, если его центръ тяжести лежитъ *подъ* осью, на проходящей чрезъ нее вертикали.

Онъ находится въ неустойчивомъ положеніи равновѣсія, если его центръ тяжести лежитъ *надъ* осью, на проходящей чрезъ ось вертикали.

Онъ находится въ безразличномъ положеніи равновѣсія, если ось проходить чрезъ центръ тяжести.

Примѣръ 2. Однородная балка (фиг. 82) упирается безъ тренія, въ вертикальную стѣну и опирается, тоже безъ тренія, о горизонтальную круглую балку *C*. Найти ея положенія равновѣсія. Пусть:

$$AB = 2a$$

Разстояніе *C* отъ стѣны = *b*.

Уголъ наклоненія балки къ стѣнѣ = θ .

(*x*, *y*) горизонтальная плоскость, проходящая чрезъ *C*.

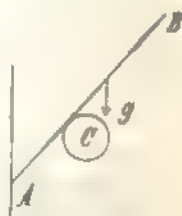
z высота центра тяжести.

Имѣемъ:

$$z = a \cdot \cos \theta - \frac{b}{\tan \theta}$$

$$\frac{dz}{d\theta} = -a \cdot \sin \theta + \frac{b}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -a \cdot \cos \theta - \frac{2b \cos \theta}{\sin^3 \theta}.$$



Фиг. 82.

Полагая $\frac{dz}{d\theta} = 0$ найдемъ, что въ положеніи равновѣсія

$$\sin \theta = \frac{b}{a}.$$

Такъ какъ $\frac{d^2z}{d\theta^2}$ отрицательна, то въ положеніи равновѣсія *z* достигаетъ максимума и равновѣсіе неустойчивое.

§ 241. Неопредѣленные задачи. Тяжелое твердое тѣло находится въ равновѣсіи, если опирается о горизонтальную плоскость тремя нележащими на одной прямой точками, и можно вычислить давленіе, производимыя тѣломъ въ каждой точкѣ опоры. Но если тѣло опирается на горизонтальную плоскость болѣе чѣмъ тремя точками, нележащими на одной прямой, то вычисленіе давленій въ точкахъ опоры является (если не вводить особыхъ предположеній) задачею неопредѣленною. Рассмотрим этотъ вопросъ нѣсколько подробнѣе.

Пусть:

A_1, A_2, \dots суть точки, которыми тяжелое тѣло опирается на неподвижную горизонтальную плоскость (x, y) .

G проекція центра тяжести тѣла на эту плоскость.

W вѣсъ тѣла.

R_1, R_2, \dots давленія въ точкахъ опоры.

(x, y) координаты точки G .

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots$ координаты точекъ A_1, A_2, \dots

При дѣйствіи параллельныхъ силъ тяжести имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} W &= R_1 + R_2 + \dots \\ Wx &= R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3 + \dots \\ Wy &= R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (562)$$

Изъ этихъ уравненій можно опредѣлить давленія R только въ томъ случаѣ, если имѣется только три точки опоры, нележащая въ одной вертикальной плоскости. Если же имѣется болѣе трехъ точекъ опоры, то задача оказывается неопредѣленною.

§ 242. Введеніе новыхъ условій, обращающихъ неопредѣленную статическую задачу въ опредѣленную. На самомъ дѣлѣ тяжелое твердое тѣло, опирающееся на нѣсколько точекъ опоры, производитъ въ каждой изъ нихъ вполнѣ опредѣленное давленіе. Слѣдовательно уиомаявая неопредѣленность оказывается только кажущаяся, происходящая отъ того, что мы не приняли во вниманіе всѣхъ существующихъ въ дѣйствительности условій.

Мы сейчасъ увидимъ на примѣрѣ, что принимая во вниманіе гибкость материала, законы которой послѣдуются въ теории упругости, можно рѣшать такія задачи, которыя для абсолютно твердаго тѣла были бы неопредѣленными.

Примѣръ. Столъ, доска котораго несжимаема и имѣетъ видъ прямоугольника и ножки, помещающіяся въ углахъ этого прямоугольника, равны между собою и нѣсколько сжимаемы пропорционально давленіямъ—стоитъ на горизонтальномъ полу. Предполагая, что полъ и доска стола абсолютно тверды, найти давленія въ точкахъ опоры при данной нагрузкѣ стола.

Пусть:

G точка приложенія силы тяжести.

(x, y) координаты точки G .

AB ось x

AD ось y

$AB = a; AD = b$.

Уравненія (562) примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} W &= R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \\ Wx &= (R_1 + R_2) a \\ Wy &= (R_2 + R_4) b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (563)$$

По сжимаемость ножекъ дать еще уравненіе. А именно: діагональ AC стола, вслѣдствіе абсолютной твердости доски, остается прямою. Слѣдовательно пониженіе центра стола равно средней арифметической пониженій точекъ A и C . То же можно сказать относительно другой діагонали. Слѣдовательно средняя арифметическая давленій въ B и D равна средней арифметической давленій въ A и C . Получимъ поэтому еще уравненіе

$$R_1 + R_2 = R_3 + R_4 \dots \dots \dots (564)$$

Четыре уравненія опредѣляютъ четыре давленія. Изъ этихъ уравненій, при $R_3 = 0$, получимъ уравненіе

$$\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 1$$

показывающее, что давленіе существуетъ только въ точкахъ A, B, D если G лежитъ на прямой, соединяющей середины сторонъ AB и AD .

Средняя послѣдовательно пунктирными прямыми середины сторонъ прямоугольника, получимъ ромбъ. Если G лежитъ внутри этого ромба, то столъ давить всеми 4-мя ножками. Если G лежитъ внѣ этого ромба, то столъ давить только тремя ножками.

§ 243. Шарнирные фермы. Система, состоящая изъ n точекъ, связанныхъ между собою твердыми стержнями, называется *фермой*. Для приложенія къ такой фермѣ начала возможныхъ перемѣщеній мы должны представить вершины ея перемѣщаемыми. При этомъ можетъ представиться нѣсколько случаевъ.

1) Если ферма устроена такъ, что углы между стержнями могутъ быть измѣняемы на конечную величину безъ измѣненія длины стержней, такую деформацию фермы называемъ *нормальною*.

2) Ферма можетъ состоять изъ стержней, взятыхъ въ числѣ и порядкѣ недостаточномъ для того, чтобы углы не могли быть измѣняемы на конечную величину, а были бы измѣняемы только бесконечно мало безъ измѣненія длины стержней. Деформация такой фермы называется *ненормальною*.

3) Ферма, имѣющая ровно только такое число стержней, которое достаточно для удержанія угловъ отъ конечныхъ измѣненій, называется *опредѣленною* или *свободно расширяемою*, такъ какъ конечное измѣненіе длины стержней не влечетъ за собою ея поломки.

4) Если число стержней фермы болѣе чѣмъ достаточно для удержанія ея угловъ отъ конечныхъ измѣненій, такъ что конечное измѣненіе длины нѣкоторыхъ стержней влечетъ за собою поломку фермы, то она называется *нерасширяемою*.

Общій способъ изслѣдованія равновѣсія фермы заключается въ слѣдующемъ. Избираемъ нѣсколько изъ ея стержней, удаляемъ ихъ мысленно и измѣняемъ дѣйствіе ихъ силами. Вслѣдствіе этого ферма дѣлается *нормально деформируемою*. Прилагаемъ начало возможныхъ перемѣщеній, не

принимая во внимание реакцій остальных стержней, такъ какъ онѣ попарно уничтожаются.

Примѣръ. Ферма, состоящая изъ какого угодно числа стержней, находится подъ дѣйствіемъ силъ, приложенныхъ къ ея вершинамъ. Найдите условіе ея равновѣсія. Пусть:

R реакція стержня, считаема положительною при его сжатіи,

r длина стержня,

X, Y, Z проложенія силы, дѣйствующей на вершину (x, y, z) .

Удалимъ мысленно всѣ стержни и замѣнимъ ихъ соответствующими реакціями, приложенными къ вершинамъ. Начало возможныхъ перемѣщеній дасть:

$$\sum R dr + \sum (X dx + Y dy + Z dz) = 0 \dots (565)$$

Если при деформации получается ферма подобная данной фермѣ, то:

$$\frac{dr}{r} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Подставляя въ (565), получимъ:

$$\sum Rr + \sum (Xx + Yy + Zz) = 0$$

гдѣ \sum распространяется на всѣ вершины и стержни.

§ 244. Реакція стержня простой фермы, на который не дѣйствуютъ внѣшнія силы. Положимъ, что R_{12} есть реакція, противъ сжатія, стержня A_1A_2 , длина его l_{12} и на него не дѣйствуютъ внѣшнія силы (вѣсомъ его можно пренебречь). Замѣнимъ стержень A_1A_2 двумя силами, приложенными къ вершинамъ, съ которыми совпадаютъ его концы; каждая изъ этихъ силъ равна R_{12} . Сдѣлаемъ неподвижною сторону A_1A_n . Деформируемъ ферму, и пусть работа внѣшнихъ силъ $= dW$. Такъ какъ остальные реакціи даютъ работу равную нулю, то начало возможныхъ перемѣщеній дасть:

$$R_{12} dl_{12} + dW = 0 \dots (566)$$

отсюда:

$$R_{12} = - \frac{dW}{dl_{12}} \dots (567)$$

Мы видимъ, что не надо было даже мысленно удалять стержень A_1A_2 , достаточно было увеличить длину его на dl_{12} , для того, чтобы получить уравненіе (566) опредѣляющее реакцію R_{12} .

Итакъ: для того чтобы опредѣлить реакціи такого стержня простой фермы, на который не дѣйствуютъ внѣшнія силы, составляется уравненіе (566), согласно началу возможныхъ перемѣщений, причемъ dW обозначаетъ работу внѣшнихъ силъ при удлиненіи только этого стержня.

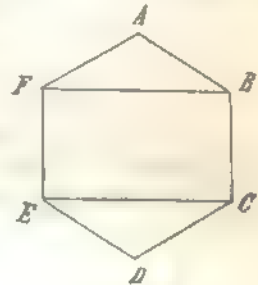
Если въ системѣ нѣсколько такихъ стержней, то реакція каждаго изъ нихъ опредѣляется по этому способу отдѣльно и для каждаго стержня

может получиться особая величина dW . Сущность этого способа заключается в томъ, что оказывается возможнымъ разбить задачу на рядъ болѣе простыхъ задачъ, рассматривая каждый разъ только тѣ перемѣ- шения, которыя происходятъ отъ измѣненія длины одного только стержня.

Приятель *Шестъ стержней образуютъ правильный многоугольникъ ABCDEF* (фиг. 83), *который подвѣшенъ за вершину A*. Для того чтобы онъ не деформировался, въ него включены еще весьма легкіе стержни *BF* и *CE*. Доказать, что реакции стержней *BF* и *CE* относятся между собою какъ 5:1.

Способъ, изложенный въ настоящемъ пара- графѣ, можетъ быть приложенъ къ этой задачѣ, такъ какъ, согласно условію, вѣсомъ стержней *BF* и *CE* можно пренебречь.

Найдемъ сначала реакцію *T* стержня *BF*. Рассмотримъ для этого перемѣшенія, происхо- дящія при весьма маломъ удлинении стержня *BF*. Пусть *2a* есть длина стороны данного шести- угольника, θ уголъ составляемый стороною *AB* (или стороною *AF*) съ вертикалью. Каждая изъ вершинъ *B* и *F* отстоитъ отъ вертикали въ направленіи стержня *BF* на $2a \sin \theta$.



Фиг. 83

Слѣдовательно работа реакции *T* будетъ

$$Td(4a \cdot \sin \theta).$$

Работа вѣсовъ верхнихъ звеньевъ *AF* и *AB*, если вѣсъ каждой сто- роны шестиугольника обозначимъ чрезъ *P*, будетъ:

$$2Pd(a \cos \theta).$$

Работа вѣсовъ остальныхъ четырехъ сторонъ будетъ:

$$4Pd(2a \cos \theta).$$

Слѣдовательно начало возможныхъ перемѣщеній даетъ:

$$T \cdot d(4a \cdot \sin \theta) + 2P \cdot d(a \cdot \cos \theta) + 4P \cdot d(2a \cdot \cos \theta) = 0$$

или

$$4a T \cos \theta - 2a P \sin \theta - 8a P \sin \theta = 0.$$

Отсюда:

$$2T = 5P \cdot \operatorname{tg} \theta \dots \dots \dots (568)$$

Найдемъ теперь реакцію стержня *CE*. При измѣненіи его длины вѣсъ верхнихъ четырехъ стержней не производитъ работы; но центры тяжести двухъ нижнихъ стержней перемѣщаются и работа тяжести равна

$$2Pd(a \cdot \cos \theta).$$

Поэтому для *CE* начало возможныхъ перемѣщеній даетъ:

$$Td(4 \cdot \sin \theta) + 2Pd(a \cdot \cos \theta) = 0$$

откуда

$$2T = P \cdot \operatorname{tg} \theta \dots \dots \dots (569)$$

Сравнивая (568) съ (569) получимъ:

$$T = 5T'.$$

§ 245. Реакція такого стержня простой формы, на который дѣйствуютъ вѣшнія силы. Пусть A_1A_2 есть такой стержень простой плоской формы, на который дѣйствуютъ вѣшнія силы:

R_{12} проложеніе реакціи въ A_1 на направленіе A_1A_2 ,

S_{12} проложеніе реакціи въ A_1 на перпендикуляр къ A_1A_2 ,

R_{21} проложеніе реакціи въ A_2 на направленіе A_1A_2 ,

S_{21} проложеніе реакціи въ A_2 на перпендикуляр къ A_1A_2 .

Удалимъ мысленно стержень A_1A_2 и замѣнимъ его этими реакціями. Пусть dl_{12} есть удлиненіе стержня A_1A_2 при неизмѣнности его направленія и при неподвижности вершины A_2 . При этихъ условіяхъ работа реакцій R_{21} , S_{21} и S_{12} равна нулю. Получимъ:

$$R_{12}dl_{12} + dW = 0 \dots \dots \dots (570)$$

для нахождения R_{12} .

Для нахождения S_{12} дадимъ другое перемѣщеніе фермѣ. По удаленіи вѣшнихъ силъ дѣйствующихъ на A_1A_2 остальные вѣшнія силы уже не въ равновѣсін; ихъ возможная работа можетъ и не равняться нулю. Сдѣлаемъ A_2 неподвижною, l неизмѣняемымъ и повернемъ ферму около оси перпендикулярной къ плоскости проходящей чрезъ A_2 и S_{12} на уголъ $d\theta$. Получимъ:

$$S_{12}d\theta + dW = 0, \dots \dots \dots (571)$$

гдѣ W вѣдетъ не то значеніе, какъ въ (570).

Изъ (571) опредѣлимъ S_{12} .

Итакъ: реакціи R_{12} и S_{12} могутъ быть найдены, если одну стержня A_1A_2 можно измѣнить, не сжимая фермы.

Если ферма не плоская, то вѣсто S_{12} изслѣдуютъ два ея проложенія: производимъ послѣдовательно три перемѣщенія (какія признаемъ болѣе удобными изъ числа возможныхъ) и получаемъ три уравненія для опредѣленія R_{12} и двухъ проложеній реакціи S_{12} .

Примѣръ: шесть равныхъ тяжелыхъ стержней образуютъ правильный тетраэдръ, подвѣшенный ниткою за середину L стороны AB . Найти реакціи при его вершинахъ (фиг. 84).

Вслѣдствіе симметріи тетраэдра его верхнее ребро AB и нижнее CD будутъ горизонтальны; прямая LM , соединяющая середины сторонъ AB и CD , будетъ вертикальна. Пусть:

$$LM = s,$$

P и P' сжимающія давленія въ ребрахъ AB и CD ,

w вѣсъ cadaго стержня.

Не измѣняя направленія AB и положенія его середины L , увеличимъ его длину на dr . Въ этомъ перемѣщеніи поперечныя реакціи S не производятъ работы, центръ тяжести стержня CD поднимется на dz , центры тяжести четырехъ боковыхъ стержней подвигнутся на $\frac{1}{2} dz$. Начало возможныхъ перемѣщеній дасть:

$$Pdr + w \cdot dz + 4w \cdot \frac{1}{2} dz = 0. \quad (572)$$

Не измѣняя направленія стержня CD и положенія его середины M , увеличимъ его длину на dr . Все остальное понизится, вслѣдствіе чего и нитка, за которую тетраэдръ подвѣшенъ, удлинится. Пусть T натяженіе нитки. Получимъ:

$$Pdr - w \cdot dz - 4w \cdot \frac{1}{2} dz + Tdz = 0. \quad (573)$$

Натяженіе T нити равно вѣсу всего тетраэдра, такъ что

$$T = 6w.$$

Поэтому (572) и (573) даютъ $P = P'$. Изъ (572) имѣемъ:

$$P \frac{dr}{ds} = - 3w.$$

Для опредѣленія P нужно еще опредѣлить $\frac{dr}{ds}$.

Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ BLC и LCM имѣемъ:

$$\overline{BC}^2 - \overline{BL}^2 = \overline{CL}^2 = \overline{CM}^2 + s^2$$

или

$$\overline{BC}^2 - \overline{BL}^2 = \overline{CM}^2 + s^2. \quad (574)$$

При полученіи уравненія (572) стержни BC и CM не измѣнялись, поэтому дифференцируя (574), получимъ:

$$- BL \cdot d(BL) = sds. \quad (575)$$

BL въ первомъ перемѣщеніи измѣнилось на $\frac{1}{2} dr$. Поэтому (575) принимаетъ видъ:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} dr = sds. \quad (576)$$

Но (574) дасть:

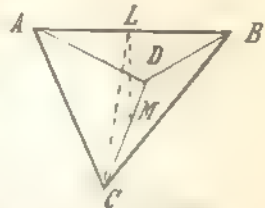
$$r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4} + s^2,$$

откуда:

$$r^2 = 2s^2$$

или

$$r = s\sqrt{2}.$$



Фиг. 84.

Подставляя въ 576, получимъ:

$$-\frac{s\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} dr = sds$$

или

$$dr = 2\sqrt{2}ds.$$

Подставивъ въ (572) найдемъ

$$P = \frac{3}{4} w\sqrt{2}. \quad (577)$$

Этому же, какъ мы видѣли, равно P' .

Опредѣлимъ реакции другихъ (боковыхъ) стержней. Разсматривая статические моменты какого-нибудь изъ этихъ стержней относительно вертикали, проходящей чрезъ одинъ изъ его концовъ, можно было бы доказать, что реакция, приложенная къ другому его концу, лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей чрезъ этотъ стержень. Эту реакцию можно, слѣдовательно, разложить на реакцию Z по вертикали и реакцию Q по стержню для точекъ A и B . Точно также получимъ реакцию Z' по вертикали и Q' по наклонному стержню для точекъ C и D . Реакции Q и Q' считаемъ положительными, когда онѣ сжимаютъ стержень. Реакции Z и Z' считаемъ положительными, когда онѣ направлены вверхъ. Удлинимъ каждый изъ наклонныхъ стержней на dr оставивъ стержень AB неподвижнымъ. Для равновѣсія стержня CD получимъ:

$$4Q'dr + 4Z'ds + wds = 0$$

BC измѣнилось на dr когда BL и CM остались безъ измѣненія.

Поэтому изъ (574) получимъ:

$$BC \cdot d(BC) = xds$$

откуда

$$ds = \sqrt{2}dr$$

$$2\sqrt{2}Q' + 4Z' + w = 0 \quad (578)$$

Равновѣсіе силъ при C дастъ:

$$-P' = 2Q' \cos 60^\circ \quad (579)$$

Но, согласно (577) и $P' = P$, имѣемъ $P' = \frac{3}{4} w\sqrt{2}$. Слѣдовательно согласно (579):

$$Q' = -\frac{3}{4} w\sqrt{2}.$$

Поэтому, согласно (578):

$$Z = \frac{1}{2} w.$$

Оставимъ неподвижнымъ звено CD и удлинимъ каждое боковое звено

на δr . Получимъ:

$$-4Zdx + 4Qdr - w \cdot dx + Tdx = 0$$

$$-P = 2Q \cdot \cos 60^\circ = Q$$

$$Q = -\frac{3}{4} w \sqrt{2}$$

$$Z = \frac{1}{3} w.$$

§ 246. Ненормальная деформация. Представимъ себѣ теперь, что углы могутъ быть вѣсколько измѣняемы безъ измѣненія длины стержней.

Если бы приложили къ этому случаю *ненормальной деформации* способъ, объясненный въ предыдущихъ параграфахъ, то получилось бы уравненіе

$$R_{12} dl_{12} + dW = 0 \dots \dots \dots (580)$$

подобное уравненію (570). Но, при $dl_{12} = 0$, или dW должно быть равнымъ нулю для удовлетворенія (580), тогда изъ (580) нельзя опредѣлять R_{12} . Или R_{12} должно быть безконечностью, чего мы не предполагаемъ.

Поэтому, въ случаѣ такой ненормальной деформации, мы должны удлинить или мысленно отнять не одинъ, а, по крайней мѣрѣ, два стержня, и получимъ:

$$R_{12} dl_{12} + R_{23} dl_{23} + dW = 0 \dots \dots \dots (581)$$

Но это уравненіе не опредѣляетъ реакцій R_{12} и R_{23} ; изъ него можно опредѣлить одну реакцію только тогда, когда дана другая реакція. Реакціи оказываются *неопредѣленными*.

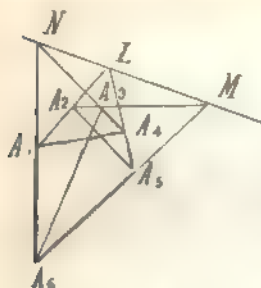
Въ этомъ случаѣ лучше предварительно разсматривать реакціи отдѣльно отъ вѣвшихъ силъ и поступать слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что двѣ совершенно одинаковыя совокупности вѣвшихъ силъ могутъ произвести, дѣйствуя каждая отдѣльно, два различныхъ распредѣленія внутреннихъ реакцій. Заставимъ всѣ вѣвшія силы одной совокупности дѣйствовать въ обратныя стороны и одновременно допустимъ дѣйствовать другую совокупность вѣвшихъ силъ въ прежнихъ направленіяхъ, получимъ ферму въ состояніи внутренняго напряжения (*self-strained state*) безъ вѣвшихъ силъ. Если окажется возможнымъ опредѣлить реакціи фермы въ этомъ ея состояніи, то присовокупляя къ нимъ заданную совокупность силъ, рѣшимъ задачу окончательно.

Этотъ способъ лучше всего выясняется на доказательствѣ теоремы слѣдующаго параграфа.

§ 247. Теорема Леви. Теорема: Дана плоская ферма, имѣющая четное число n вершинъ, n стержней, соединяющихъ попарно вѣтви вершины и $\frac{1}{3}n$ нитей, служащихъ диагоналями соединяющими противоположныя вершины. Такая ферма можетъ находиться въ равновѣсіи въ со-

стоянии внутренняго напряжения, если $\frac{1}{2}$ n точек пересѣченія противоположныхъ сторонъ лежитъ на одной прямой (фиг. 85).

Нити находятся въ состояніи натяженія. Положимъ, что стержни находятся въ состояніи сжатія. Докажемъ теорему для шестиугольника, но доказательство можно распространять на всякій многоугольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ.



Фиг. 86

Если реакции $R_{12} \dots$ находятся въ равновѣсіи, то, рассматривая точку A_2 , видимъ, что R_{12} и R_{23} уравниваются реакціею R_{25} и потому эквивалентны реакціямъ R_{24} и R_{56} , приложеннымъ въ A_5 и уравнивающимися тою же R_{25} . Итакъ, R_{12} и R_{13} уравниваются реакціями R_{24} и R_{56} , или, что тоже самое, R_{12} и R_{13} уравниваются реакціями R_{25} и R_{56} . Точно такъ же могли бы доказать, что R_{12} и R_{13} уравниваются реакціями R_{24} и R_{56} .

Итакъ имѣемъ эквивалентныя совокупности попарно взятыхъ реакцій:

R_{12} и R_{13} ,	равнодѣйствующая которыхъ приложена, положимъ, въ L .
R_{23} и R_{56} ,	» » » » » M ,
R_{34} и R_{61} ,	» » » » » N .

По доказанному эти равнодѣйствующія попарно эквивалентны *). Но это можетъ быть только въ томъ случаѣ, если L , M , N лежатъ на одной прямой, по построению же: L , M , N суть точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ шестиугольника. Итакъ эти точки пересѣченія должны, для равновѣсія, лежать на одной прямой.

Обратная теорема. Положимъ, что точки пересѣченія L , M , N противоположныхъ сторонъ многоугольника лежатъ на одной прямой. Приложимъ къ L и M по произвольной силѣ P въ противоположномъ направленіи одна къ другой.

Пусть приложенія этихъ силъ P на стороны, пересѣкающіяся въ L и M , будутъ (R_{12}, R_{13}) и (R_{23}, R_{56}) . Эти силы будутъ находиться въ равновѣсіи. Следовательно R_{12} и R_{23} дѣйствующія въ A_2 находятся въ равновѣсіи съ R_{24} и R_{56} дѣйствующими въ A_5 . Поэтому равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ въ A_2 должна быть направлена по $A_2 A_5$, равнодѣйствующая двухъ силъ, приложенныхъ въ A_5 , должна быть направлена по $A_5 A_2$, и эти равнодѣйствующія должны быть взаимно равны. Точно также поступаемъ съ другими диагоналями и доказываемъ этимъ самымъ равновѣсіе всѣхъ реакцій.

*) Само собою разумѣется, что если равнодѣйствующая въ L , для уравниванія равнодѣйствующей въ M , дѣйствуетъ въ одну сторону, то, для равновѣсія съ равнодѣйствующею въ N , она должна дѣйствовать въ противоположную сторону если L лежитъ между M и N .

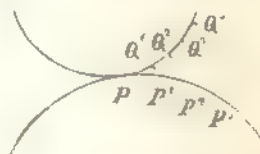
Изъ этого построения (именно изъ разложенія силы F) можно найти и отношеніе каждой реакціи къ произвольной силѣ F .

Слѣдствіемъ теоремы Леви является слѣдующее.

Теорема Крофтона. *Шестиугольная плоская ферма, стороны которой суть стержни, а диагонали соединяющія противоположныя вершины суть нити, находится въ равновѣсїи подѣ вліяніемъ внутреннихъ напряженій если около шестиугольника можно описать коническое сѣченіе.* По теоремѣ Леви такая ферма находится въ равновѣсїи подѣ вліяніемъ внутреннихъ напряженій, если точки L , M , N пересѣченія лежатъ на одной прямой. Но, по знаменитой теоремѣ Паскаля, эти точки лежатъ на одной прямой только въ томъ случаѣ, если около многоугольника можно описать коническое сѣченіе. Такимъ образомъ теорема Крофтона доказана.

§ 248. Полодіи. Мы видѣли въ § 226-мъ, что всякое перемѣщеніе плоской фигуры изъ одного положенія въ другое можетъ быть произведено вращеніемъ около центра перемѣщенія, согласно теоремѣ Шаля.

Положимъ, что фигура движется по плоскости. Въ теченіи безконечно-малаго времени dt она перемѣщается изъ одного положенія въ другое безконечно-близкое положеніе, вращаясь, согласно теоремѣ Шаля, около вѣкотораго центра перемѣщенія на безконечно малый уголъ $d\theta$. Въ слѣдующій безконечно-малый промежутокъ времени фигура переходя изъ 2-го положенія въ 3-е вращается уже около другого центра перемѣщенія, который будетъ занимать уже другое положеніе на плоскости и другое положеніе по отношенію къ фигурѣ. Каждый такой центръ перемѣщенія служитъ центромъ только на одно мгновеніе и потому называется *мгновеннымъ центромъ*... Мы видимъ, что, при непрерывномъ движеніи фигуры по плоскости, мгновенный центръ перемѣщается по плоскости; при этомъ онъ описываетъ кривую, называемую *неподвижною полодіею*. Онъ перемѣщается также и по отношенію къ фигурѣ и описываетъ въ подвижной плоскости, неизмѣнимо соединенной съ фигурою, кривую называемую *подвижною полодіею*.



Фиг. 86.

Отмѣтимъ на неподвижной полодіи (фиг. 86) рядъ послѣдовательныхъ безконечно-малыхъ дугъ PP' , PP'' . На подвижной полодіи отмѣтимъ рядъ дугъ PQ' , $Q'Q''$... равнымъ дугамъ взятымъ на неподвижной полодіи. Когда окончится вращеніе около P , то центры P' и Q' придутъ въ совпаденіе и вращеніе будетъ происходить около P' , затѣмъ Q'' придетъ въ совпаденіе съ P'' и вращеніе будетъ происходить около P'' , и такъ далѣе. Въ каждомъ послѣдовательномъ мгновенномъ центрѣ полодіи касаются одна другой, и подвижная полодія катится по неподвижной.

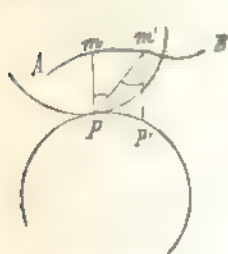
Итакъ: *всякое движеніе фигуры въ плоскости происходитъ такъ, какъ будто полодія, соединенная неизмѣнимо съ фигурою, катится по неподвижной.*

вижной поверхности. При томъ, въ каждый данный моментъ общая точка касанія поверхностей служитъ мгновеннымъ центромъ вращения на безконечно-малый уголъ.

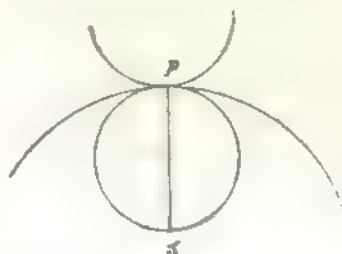
Во время такого вращения всякая точка m подвижной фигуры описываетъ безконечно-малую дугу окружности, радиусъ которой есть Pm . Следовательно: нормаль къ траекторіи каждой точки m фигуры проходитъ чрезъ мгновенный центръ P .

§ 249. Окружность устойчивости. Совершивъ поворотъ на уголъ $d\theta$ около P , фигура начнетъ вращаться около P' ; точка m придетъ въ положеніе m' (фиг. 87), mP и $m'P'$ будутъ послѣдовательныя нормали траекторіи точки m . Если точка m занимаетъ такое положеніе въ фигурѣ, что уголъ $Pm'P = d\theta$, то послѣдовательныя нормали mP и $m'P'$ взаимно параллельны и радиусъ кривизны траекторіи AB въ точкѣ m равенъ без-

конечности. Следовательно, въ этомъ случаѣ точка m есть точка перегиба своей траекторіи AB . Поэтому, если мы опишемъ окружность, проходящую чрезъ P и P' и выписывающую уголъ $d\theta$, то всякая точка ея нахо-



Фиг. 87.



Фиг. 88.

дится въ томъ мѣстѣ своей траекторіи, для котораго радиусъ кривизны равенъ безконечности. Эта окружность называется *окружностью устойчивости* *).

Изъ сказаннаго видно, что *окружность устойчивости есть геометрическое мѣсто точекъ, проходящихъ чрезъ точки перегиба своихъ траекторій*.

Если дуга $PP' = ds$, то построение окружности устойчивости можно произвести слѣдующимъ образомъ. Проводимъ чрезъ мгновенный центръ P (фиг. 88) нормаль къ неподвижной поверхности и откладываемъ на ней $PS = \frac{ds}{d\theta}$. Окружность, построенная на PS какъ на диаметрѣ, и будетъ окружностью устойчивости. Дѣйствительно, обозначивъ радиусъ этой окружности чрезъ r и замѣтивъ, что центральный уголъ равенъ удвоенному вписанному углу, имѣемъ:

$$r \cdot 2d\theta = ds.$$

Но діаметръ $PS = 2r$. Следовательно $PS = \frac{ds}{d\theta}$.

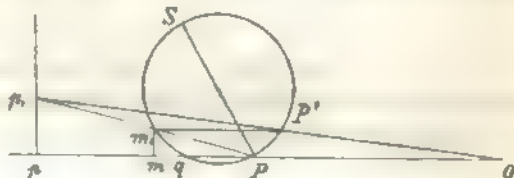
§ 250. Радиусъ кривизны траекторіи, описываемой точкою подвижной фигуры. Пусть на фиг. 89 точки P, P', m, m', S имѣютъ то же самое зна-

*) Въ кинематикѣ она называется *окружностью поворотовъ*.

чение какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, точка q есть точка пересѣченія прямой Pm съ начерченной окружностью устойчивости.

Радиусъ кривизны траекторіи, описываемой точкою p , лежащею на продолженіи прямой Am не будетъ равенъ безконечности, потому-что точка p не лежитъ на окружности устойчивости. Найдемъ величину ρ этого радиуса кривизны.

При поворотѣ движущейся фигуры около мгновеннаго центра A на уголъ ab точка p придетъ въ p' , точка m въ m' ; согласно сказанному въ § 249-омъ $m'P'$ параллельна mP . Точки P, m', p' лежатъ на одной прямой; $P'm'$ —есть вторая нормаль траекторіи точки m ; $p'P'$ —есть вторая нормаль траекторіи точки p , такъ что пересѣченіе O соотвѣдныхъ нормалей Op и Op' есть центръ кривизны траекторіи точки p . Поэтому Op есть искомый радиусъ кривизны ρ .



Фиг. 89.

Благодаря параллельности $P'm'$ и Pm получаемъ подобные треугольники, изъ которыхъ видамъ, что:

$$\frac{pm}{pP} = \frac{p'm'}{p'P} = \frac{p'P}{p'O}.$$

Отсюда

$$pm \cdot p'O = pP \cdot p'P \dots \dots \dots (582)$$

Въ предѣлѣ: точки m, m', q сольются, точно также сольются точки p и p' , и (582) обратится въ

$$pq \cdot pO = pP^2$$

или

$$pq \cdot \rho = pP^2 \dots \dots \dots (583)$$

Итакъ: для того чтобы найти радиусъ кривизны траекторіи, описываемой точкою p неизмѣнно соединенною съ движущеюся фигурою, находимъ точку q пересѣченія окружности устойчивости съ нормалью pP и определяемъ ρ изъ формулы (583).

Мы считаемъ положительнымъ направленіе отъ p къ P . Следовательно ρ положительно или отрицательно, смотря по тому, положительно ли или отрицательно pP . Поэтому: траекторія точки p обращена къ P вогнутою или выпуклою стороною, смотря по тому, лежитъ-ли p внѣ или внутри окружности устойчивости.

§ 251. Геометрический признакъ устойчивости или неустойчивости равновѣсія. Въ положеніи равновѣсія касательная къ траекторіи центра тяжести горизонтальна, такъ какъ, согласно § 238 высота центра тяжести

въ положеніи равновѣсія максимальная или минимальная. Слѣдовательно нормаль pP къ траекторіи центра тяжести p вертикальна.

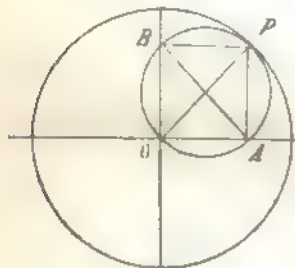
Согласно § 238 равновѣсіе устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, находится ли центръ тяжести на наименьшей или на наибольшей высотѣ.

Слѣдовательно: равновѣсіе устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, обращена ли траекторія центра тяжести вогнутостью вверхъ или внизъ.

Но, куда обращена вогнутостью траекторія центра тяжести, можно узнать, согласно предыдущему параграфу, по тому, что: траекторія центра тяжести обращена вогнутостью къ мгновенному центру, если центръ тяжести лежитъ внѣ окружности устойчивости, если же центръ тяжести лежитъ внутри окружности устойчивости, то траекторія его обращена выпуклостью къ мгновенному центру.

§ 252. Нахожденіе мгновеннаго центра и окружности устойчивости по даннымъ траекторіямъ двухъ точекъ подвижной фигуры и по положеніямъ этихъ точекъ на ихъ траекторіяхъ.

Пусть даны траекторіи точекъ A и B подвижной фигуры и положенія ихъ на этихъ траекторіяхъ. Согласно § 248 мгновенный центръ P лежитъ на нормаляхъ къ траекторіямъ возставленныхъ къ нимъ въ A и B . Слѣдовательно: мгновенный центръ P находится на пересѣченіи нормалей.



Фиг. 90.

Согласно съ (583) окружность устойчивости определяется слѣдующимъ образомъ. Если траекторіи даны, то, слѣдовательно, даны и ихъ радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 въ точкахъ A и B . Откладываемъ на нормаляхъ

$$AQ = \frac{AP^2}{\rho_1}, \quad BQ_1 = \frac{BP^2}{\rho_2}.$$

Окружность, проходящая чрезъ точки Q , Q_1 , P и будетъ окружностью устойчивости.

Примѣръ 1-ый. Прямой стержень AB движется такъ, что концы его A и B ходятъ по взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ. Найти мгновенный центръ и окружность устойчивости (фиг. 90).

Возставляя ко взаимно перпендикулярнымъ прямымъ перпендикуляры изъ A и B , находимъ въ пересѣченіи ихъ мгновенный центръ P .

Радиусы кривизны ρ_1 и ρ_2 данныхъ прямыхъ равны безконечности. Слѣдовательно точки, названныя въ настоящемъ параграфѣ Q и Q_1 , совпадаютъ съ A и B . Окружность, проходящая чрезъ A , B , P и будетъ окружностью устойчивости.

Въ прямоугольникѣ $OAPB$ діагонали равны и половины ихъ равны, уголь при P прямой; слѣдовательно окружность устойчивости проходить

также и чрезъ точку O пересѣченія данныхъ взаимноперпендикулярныхъ прямыхъ.

Примѣръ 2-й. *Найти пологія въ движеніи стержня, даннымъ въ предыдущемъ примѣрѣ.* Неподвижная пологія есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ P по отношенію къ неподвижной плоскости. Вслѣдствіе равенства диагоналей P отстоитъ отъ O всегда въ одинаковомъ разстояніи равномъ длинѣ AB стержня. Слѣдовательно, неподвижная пологія есть окружность, описанная изъ O радиусомъ $OP = AB$.

Подвижная пологія есть геометрическое мѣсто мгновенныхъ центровъ P по отношенію къ подвижной фигурѣ (въ данномъ случаѣ—по отношенію къ стержню AB). Уголъ APB прямой. Но геометрическое мѣсто вершинъ прямыхъ угловъ, опирающихся на данную гипотезу AB , есть окружность, описанная на AB какъ на діаметрѣ. Очевидно, въ данномъ случаѣ, подвижная пологія тождественна съ окружностью устойчивости.

Итакъ: *такое движеніе стержня опирающагося концами на двѣ взаимно-перпендикулярныя прямыя, приводится къ катанью круга, поспринятаго на стержень какъ на діаметръ, внутри вѣсое большаго окружности* (Эти круги называются кругами Кардана).

Примѣръ 3-й. *Разсмотримъ условия устойчивости равновѣсія горизонтальнаго круглаго цилиндра, способнаго кататься внутри орбитнаго круглаго цилиндра вѣсое большаго діаметра.* Равновѣсіе и движеніе такого цилиндра вполне опредѣляется равновѣсіемъ и движеніемъ фигуры, получаемой въ его пересѣченіи съ вертикальною плоскостью перпендикулярною къ его оси. Въ пересѣченіи съ такою плоскостью система данныхъ цилиндровъ представляетъ собою какъ разъ круги Кардана, упомянутые въ предыдущемъ примѣрѣ, и малый кругъ есть кругъ устойчивости.

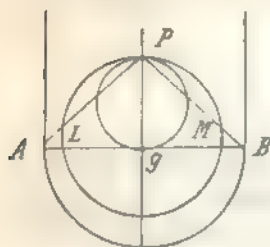
Нижнее положеніе цилиндра будетъ положеніемъ устойчиваго равновѣсія. Дѣйствительно, въ этомъ положеніи центръ тяжести G лежитъ по вертикали надъ мгновеннымъ центромъ P . Центръ тяжести G лежитъ *внутри* окружности устойчивости. Слѣдовательно, траекторія его обращена выпуклостью къ P , а вогнутостью *вверхъ*: равновѣсіе устойчиво. Этотъ примѣръ поучителенъ, потому что сѣченія самыхъ тѣлъ представляютъ собою круги Кардана, столь часто встрѣчающіеся въ практической механикѣ. Но рѣшеніе вопроса очевидно само по себѣ и безъ помощи теоріи. Перенемъ къ примѣру, въ которомъ результатъ не очевиденъ.

Примѣръ 4-ый. *Однородный стержень AB длины $2l$ занимаетъ горизонтальное положеніе, опираясь своими концами (фиг. 91) безъ тренія на вогнутую внутреннюю поверхность сосуда, имѣющаго формы поверхности вращенія около вертикальной оси. Изслѣдовать равновѣсіе стержня.*

* Примѣры 1-й и 2-й настоящаго параграфа имѣютъ капитальное значеніе въ практической механикѣ, равно какъ теорема Шалля и теорія пологій.

Мгновенный центр P , лежащий на пересечении нормалей, находится, благодаря симметрии сосуда, на вертикальной оси. Построим, по правилу § 252, точки L и M , откладывая по нормальям: $AL = BM = \frac{AP^2}{\rho}$.

Окружность, проходящая чрез L , M , P и будет окружностью устойчивости. Построим еще окружность на GP как на диаметр (G центр тяжести AB). Обозначим точки пересечения ее с AL и MB чрез H и N . Касательная есть средняя пропорциональная между всею сходящею и ее вышним стрѣломъ. Следовательно, $AN \cdot AP = AG^2$. Центр тяжести G лежитъ подъ P , поэтому равновѣе неустойчиво, если G лежитъ внутри окружности устойчивости, то есть если $AL < AN$. Но



Фиг. 91.

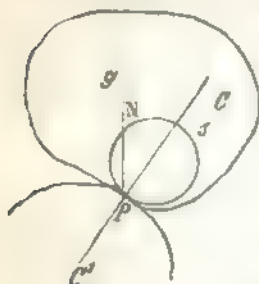
$$AL = \frac{AP^2}{\rho}; \quad AN = \frac{AG^2}{AP}.$$

Следовательно равновѣе устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, будетъ ли

AP^3 больше или меньше $P\rho$.

253. Равновѣе камня на камнѣ. Тяжелое тѣло находится на неподвижной поверхности; коэффициентъ тренія очень великъ и тѣло симметрично относительно вертикальной плоскости, проходящей чрезъ точку касанія P съ неподвижною поверхностью. Изслѣдуемъ равновѣе такого тѣла.

Точка A есть мгновенный центръ. Пусть CNC есть общая нормаль къ неподвижной поверхности и къ поверхности тѣла; C и C' центры кривизны (фиг. 92). Обозначимъ чрезъ $d\theta$ уголъ, на которой тѣло повертывается около P до тѣхъ поръ, пока не придутъ въ совпаденіе такія точки p и p' , для которыхъ



Фиг. 92.

$$Pp = Pp' = ds.$$

Замѣчаемъ, что:

$$d\theta = \angle PCp + \angle PC'p'$$

или

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} + \frac{ds}{\rho_1} \dots \dots (584)$$

Для построения окружности устойчивости откладываемъ по общей нормали (см. § 249) длину $P_s = \frac{ds}{d\theta}$. Окружность, построенная на P_s какъ на диаметръ и будетъ окружностью устойчивости. Обозначимъ этотъ диаметръ чрезъ δ , такъ что

$$P_s = \delta = \frac{ds}{d\theta}.$$

Тогда (584) приметъ видъ:

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} \dots \dots \dots (585)$$

Обозначимъ чрезъ N точку пересѣченія окружности устойчивости съ прямою PG , соединяющею центръ тяжести G съ мгновеннымъ центромъ P . Если G лежитъ внѣ окружности устойчивости, то траекторія его обращена (см. § 251) вогнутостью къ мгновенному центру P . Поэтому *равновѣсие будетъ устойчиво или неустойчиво, смотря по тому, лежитъ ли G ниже или выше N .*

Обозначимъ чрезъ α уголъ наклопенія общей нормали CC' къ вертикали.

$$PN = \delta \cdot \cos \alpha = \frac{\rho \rho'}{\rho + \rho_1} \cdot \cos \alpha.$$

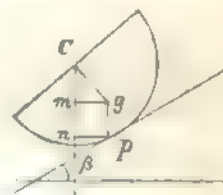
Слѣдовательно при

$$PG < \frac{\rho \rho'}{\rho + \rho_1}$$

центръ тяжести G лежитъ на самой окружности устойчивости и равновѣсїе будетъ безразличнымъ.

Примѣръ. Тяжелая полусфера лежитъ съ большимъ треніемъ на наклонной плоскости. Имѣетъ ли равновѣсїе (фиг. 93).

Центръ тяжести полусферы смѣщается на перпендикуляръ возставленномъ къ его плоскому основанію изъ ея центра. Слѣдовательно уголъ φ наклопенія плоскости этого основанія къ горизонту равенъ углу смежному съ PGC , такъ какъ въ положеніи равновѣсія G лежитъ на вертикали, проходящей чрезъ P . Обозначимъ чрезъ β уголъ наклопенія наклонной плоскости къ горизонту. Проведемъ чрезъ центръ C полусферы вертикаль Cm и изъ G и P горизонталн Gm и Pn . Имѣемъ.



Фиг. 93.

$$mG = nP = CP \cdot \sin \beta < CG$$

потому что mG есть катетъ треугольника, въ которомъ CG гипотенуза. Но $CG = \frac{3}{8} r$). Слѣдовательно:

$$r \sin \beta < \frac{3}{8} r \dots \dots \dots (586)$$

есть условіе равновѣсія.

Если это условіе удовлетворено, то равновѣсїе будетъ устойчивымъ. Идѣйствительно, радіусъ кривизны ρ' наклонной плоскости равенъ r , слѣдовательно, согласно (585)

$$\delta = r,$$

*). Положеніе центра тяжести полусферы можно опредѣлить комбинируя ~~указанное~~ въ §§ 119 и 122.

поэтому окружность описанная на CP какъ на диаметрѣ, есть окружность устойчивости; уголъ φ острый, поэтому уголъ CGP тупой; слѣдовательно G лежитъ внутри окружности устойчивости, траекторія его обращена выпуклостью къ мгновенному центру P . Слѣдовательно эта траекторія центра тяжести G обращена вогнутостью вверхъ, и потому равновѣсіе устойчиво.

Изъ треугольника CPG слѣдуетъ

$$\frac{CG}{CP} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} = \frac{CG}{r} = \frac{3}{8},$$

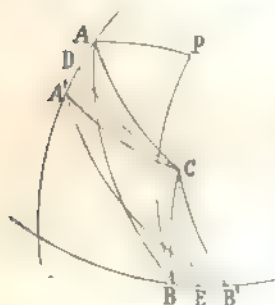
откуда

$$\sin \varphi = \frac{8}{3} \sin \beta.$$

ГЛАВА VII.

Общій случай движенія неизмѣняемой системы.

§ 254. Ось перемѣщенія абсолютно твердаго тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку. Приступая къ изслѣдованію какого бы то ни было движенія абсолютно твердаго тѣла, докажемъ прежде всего, для тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку, теорему аналогичную теоремѣ Шаля, изложенной въ § 226-омъ.



Фиг. 94.

Опишемъ около неподвижной точки O тѣла сферу, соединимъ ее неизмѣнно съ тѣломъ и пусть P есть точка пересѣченія этой сферы съ радиусомъ, проведеннымъ изъ O черезъ данную точку Q тѣла. Движеніе всякой точки Q тѣла можетъ быть представлено движеніемъ такого изображенія P полученнаго на сферѣ.

Перемѣщеніе всякой совокупности точекъ тѣла, при движеніи тѣла изъ одного положенія въ другое, вполне опредѣляется перемѣщеніемъ совокупности изображеній P этихъ точекъ по

сферѣ. Перемѣщеніе всякой фигуры по сферѣ вполне опредѣляется перемѣщеніемъ какой-нибудь дуги AB большого круга, неизмѣнно соединенной съ фигурою. Дѣйствительно, если дано 1-ое положеніе дуги AB , второе ея положеніе $A'B$ и 1-ое положеніе P какой-нибудь точки фигуры, то 2-ое положеніе P' точки P находится простымъ построеніемъ на $A'B'$ сферическаго треугольника $A'B'P'$ равнаго и совмѣщаемаго съ треугольникомъ ABP .

Докажемъ теперь (фиг. 94), что всегда можно перемѣстить дугу AB въ любое другое данное положеніе $A'B$ на сферѣ вращеніемъ около некоторой оси, проходящей чрезъ центръ O сферы. Проводимъ чрезъ середины

D и E дугъ AA' и BB' дуги большихъ круговъ перпендикулярныхъ къ AB и $A'B'$. Пусть C есть ихъ точка пересѣченія. Не трудно видѣть, что $CA = CA'$; $CB = CB'$. Но по положенію $AB = A'B'$. Слѣдовательно сферическіе треугольники ACB и $A'CB'$ равны. Поэтому можно перемѣстить треугольникъ ACB въ положеніе $A'CB'$, и достигнуть этимъ требуемаго перемѣщенія AB въ $A'B'$ вращеніемъ ABC около точки C . Это вращеніе можно произвести вращеніемъ сферы и тѣла около оси OC . Отсюда слѣдуетъ

Теорема Эйлера: перемѣщеніе тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку, изъ одного данное положенія въ другое данное положеніе всегда можетъ быть произведено вращеніемъ около оси, проходящей чрезъ его неподвижную точку.

Если радиусъ сферы сдѣлать безконечно большимъ, то получимъ плоскость, дуги большихъ круговъ обратятся въ прямыя, и получимъ теорему Шаля.

Ось OC , около которой надо вращать тѣло для перемѣщенія его изъ одного данное положенія въ другое, называется *осью перемѣщенія*.

§ 255. **Аксониды.** Въ § 248, пользуясь теоремою Шаля, мы показали, что всякое непрерывное движеніе плоской фигуры происходитъ такъ, какъ будто неизмѣнимо соединенная съ фигурою полодія каталась по неподвижной полодии.

Пользуясь теоремою Эйлера, приходимъ къ заключенію, что сферическая фигура движется такъ, какъ будто неизмѣнимо соединенная съ нею сферическая полодія каталась по неподвижной сферической полодии. Соединивъ вѣтъ точки этихъ сферическихъ полодій съ неподвижною точкою O , получимъ два конуса: одинъ подвижный, неизмѣнимо соединенный съ тѣломъ, другой неподвижный; при катаніи сферической полодии, подвижный конусъ катается по неподвижному. Эти конусы называются *аксонидами*.

Итакъ: *Всякое движеніе тѣла, имѣющаго одну только неподвижную точку, происходитъ такъ, какъ будто неизмѣнимо соединенный съ тѣломъ аксонидъ катается по неподвижному аксониду.*

§ 256. **Мгновенная ось.** Общая образующая, по которой въ данный моментъ соприкасаются аксониды, остается неподвижною въ теченіи безконечно малаго промежутка времени. Въ теченіи этого времени тѣло вращается около общей образующей на безконечно малый уголъ, пока не придутъ въ совпаденіе слѣдующія образующія и начнется вращеніе около прямой, по которой они совпадутъ, и такъ далѣе. Такимъ образомъ въ каждое мгновеніе происходитъ безконечно малое вращеніе тѣла около *мгновенной оси*, по которой прикасаются аксониды; въ слѣдующее мгновеніе вращеніе происходитъ около другой мгновенной оси, и такъ далѣе. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ тѣлѣ составляетъ подвижный аксонидъ. Геометрическое мѣсто мгновенныхъ осей въ пространствѣ составляетъ неподвижный аксонидъ.

§ 257. Движение свободного твердого тѣла. Положимъ, что тѣло не имѣетъ ни одной неподвижной точки.

Теорема Каховы бы ни были два заданныхъ положенія твердаго тѣла, всегда можно перемѣстить его изъ 1-го положенія во 2-ое посредствомъ слѣдующихъ двухъ движеній: 1) поступательнаго движенія, при которомъ всѣ точки тѣла проходятъ равныя и параллельныя прямолинейныя пути, и 2) вращательнаго движенія около некоторой оси.

Доказательство. Переведемъ какую-нибудь точку P тѣла въ новое заданное ея положеніе P' . Затѣмъ, сдѣлавъ ее неподвижною, всегда можемъ, согласно § 241, вращеніемъ тѣла около оси перемѣщенія проходящей чрезъ P' повернуть тѣло во 2-ое его положеніе.

Эти два движенія независимы одно отъ другого, и поэтому можно измѣнить порядокъ ихъ послѣдовательности.

Точка P , около которой приходится въ такомъ перемѣщеніи вращать тѣло, называется центромъ приведенія. Изъ способа доказательства теоремы этого параграфа видно, что любая точка тѣла, или даже любая точка, неизмѣнимо соединенная съ тѣломъ, можетъ быть принята за центръ приведенія.

§ 258. Параллельность осей вращенія для всѣхъ точекъ приведенія.

Перемѣщеніе тѣла изъ 1-го даннаго положенія во 2-ое можетъ быть произведено вращеніемъ около оси PR и поступательнымъ движеніемъ PP' . То же самое перемѣщеніе тѣла можетъ быть произведено вращеніемъ около оси QS и поступательнымъ движеніемъ QQ' .

Въ первомъ изъ этихъ перемѣщеній, въ которомъ за центръ перемѣщенія принята точка P , какая-нибудь точка M тѣла совершаетъ два движенія: 1) прямолинейное на разстояніе равное и параллельное PP' , и 2) движеніе по дугѣ окружности, лежащей въ плоскости перпендикулярной къ PR . Второе изъ этихъ движеній не производится точкою M только въ томъ случаѣ, если она находится на оси PR . Слѣдовательно перемѣщенія одинаковыя съ перемѣщеніемъ центра приведенія производятъ только тѣ точки тѣла, которыя лежатъ на оси PR , соответствующей центру приведенія P .

Проведемъ чрезъ Q прямую параллельную PR . Разстоянія между 1-ыми и 2-ыми положеніями точекъ, лежащихъ на этой параллельной прямой, равны и параллельны разстояніямъ между 1-ыми и 2-ыми положеніями точки Q . Слѣдовательно эта параллельная прямая служить осью вращенія, когда Q принимается за центръ приведенія. Итакъ: оси вращенія, получаемыя для всѣхъ центровъ приведенія, взаимно параллельны.

§ 259. Равенство угловъ вращенія. Пусть a есть разстояніе между осями вращенія, получаемыми при центрахъ приведенія P и Q ; углы, на которые тѣло вращается около этихъ осей, обозначаямъ, соответственно, черезъ θ и θ' . Пусть плоскость чертежа (фиг. 95) перпендикулярна къ

этимъ осямъ, такъ что $PQ = a$. Положимъ, что PP' и QQ' суть перемѣщенія центровъ P и Q . Эти перемѣщенія могутъ быть и не въ плоскости чертежа.

Вслѣдствіе вращенія θ центръ Q описываетъ около оси PR дугу кружности радіуса a . Хорда Qq этой дуги равна $2a \sin \frac{\theta}{2}$. Разстояніе QQ' между 1-мъ и 2-мъ положеніемъ точки Q складается изъ этого разстоянія Qq пройденнаго при вращеніи и изъ разстоянія равнаго PP' пройденнаго при поступательномъ движеніи.

Точно такъ же, вслѣдствіе вращенія θ' около оси QS , точка P описываетъ дугу, хорда которой равна $2a \sin \frac{\theta'}{2}$, и разстояніе PP' между 1-мъ и 2-мъ положеніемъ точки P складается изъ этой хорды Pp и изъ разстоянія равнаго QQ' .



Фиг. 95.

Но если PP' вмѣстѣ съ Qq дадутъ перемѣщеніе QQ' , и QQ' вмѣстѣ съ Pp дадутъ PP' , то должно существовать равенство:

$$Qq = Pp$$

или

$$2a \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2a \sin \left(\frac{\theta'}{2} \right)$$

при чемъ Qq и Pp должны имѣть противоположныя направленія. А это можетъ осуществиться только въ томъ случаѣ, если вращеніе θ и θ' равны и совершаются въ одномъ направленіи.

Итакъ: углы вращенія одинаковы для всѣхъ центровъ приведенія.

§ 260. Равенство проекцій перемѣщеній на ось вращенія. Перемѣщеніе QQ' складается, какъ мы видѣли въ § 259, изъ перемѣщеній PP' и Qq , но Qq перпендикулярно къ оси PR . Слѣдовательно проекція перемѣщенія QQ' на PR равна проекціи перемѣщенія PP' на PR . Итакъ, проекція перемѣщеній всѣхъ точекъ на ось вращенія равны между собою.

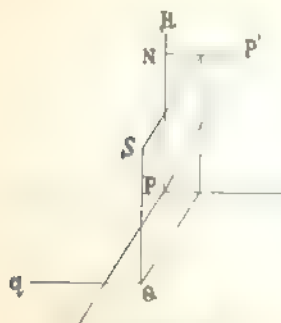
§ 261. Всякій поворотъ около оси можетъ быть составленъ изъ поворота около другой оси и поступательнаго перемѣщенія. Положимъ, что перемѣщеніе тѣла состоитъ только изъ поворота на уголъ θ около оси PR безъ поступательнаго движенія. Примемъ теперь за центръ приведенія точку Q находящуюся на разстояніи a отъ оси PR . Тогда данное перемѣщеніе можетъ быть составлено изъ поступательнаго перемѣщенія равнаго хордѣ $Qq = 2a \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)$, составляющаго уголъ $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, съ плоскостью QPR , и изъ поворота на уголъ θ около оси, параллельной PR и проходящей чрезъ Q .

Итакъ: Результатъ поворота тѣла на уголъ θ около оси можетъ быть достигнутъ совокупностью поворота на такой же уголъ θ около другой оси и поступательнаго перемѣщенія.

Если угол θ бесконечно малъ, то эта теорема обращается въ слѣдующую: *вращеніе ωdt около оси PR эквивалентно такому же вращенію около параллельной оси QS , находящейся на разстояніи a отъ PR , сложенному съ поступательнымъ движеніемъ $a \omega dt$ перпендикулярнымъ къ плоскости, проходящей чрезъ PR и QS и направленнымъ въ ту сторону, въ которую двигалась ось QS при вращеніи около PR .*

§ 262. Центральная ось. Покажемъ, что можно всегда устроить приведеніе перемѣщенія такъ, что направленія поступательнаго движенія и оси вращенія совпадутъ. Такая ось вращенія называется *центральной осью*.

Положимъ, что перемѣщеніе изъ 1-го даннаго положенія во 2-ое можетъ быть произведено поворотомъ на уголъ θ около оси PR и поступательнымъ перемѣщеніемъ PP' . Опустимъ изъ P' перпендикуляръ $P'N$ на ось PR (фиг. 96). Положимъ, что найдена та ось QS вращеніемъ около



Фиг. 96

которой и поступательнымъ движеніемъ вдоль по ней достигается результатъ даннаго перемѣщенія. Согласно §§ 258 и 259 ось QS должна быть параллельна оси PR (фиг. 96), и поворотъ около оси QS долженъ совершаться на уголъ равный θ . Поступательное движеніе вдоль QS должно продвинуть точку P по PR на разстояніе равное QQ' и вращеніе около QS должно подвинуть точку P по дугѣ, входящей въ плоскости перпендикулярной къ оси QS . Слѣдовательно:

$$QQ = PN$$

и NP' должна быть хордою упомянутой дуги, по которой P , достигнувъ точки N , переходитъ въ P' . Поэтому QS должна лежать въ плоскости, перпендикулярной къ NP' и дѣлящей NP' пополамъ. Кромѣ того QS должна находиться въ такомъ разстояніи a отъ PR , что:

$$NP' = 2a \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \dots \dots \dots (587)$$

Слѣдовательно QS должна быть въ такомъ разстояніи y отъ плоскости NPP' , что:

$$NP' = 2y \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \dots \dots \dots (588)$$

Вращеніе θ около QS происходитъ, согласно § 259, въ томъ же направленіи, въ какомъ происходило вращеніе θ около PR , и перемѣщаетъ N въ P . Поэтому разстояніе y должно быть отложено отъ середины хорды NP (перпендикулярно къ плоскости NPP') въ ту сторону, въ которую эта середина хорды перемѣщается даннымъ вращеніемъ около PR . Такимъ

образомъ получается одно вполне опредѣляемое положеніе искомой центральной оси QS .

Остается еще доказать, что поступательное движеніе новаго центра приведенія Q происходитъ по QS .

Вслѣдствіе заданнаго вращенія θ около PR точка Q описываетъ дугу, хорда которой Qq равна и параллельна хордѣ NP , но направлена въ противоположную сторону. Поэтому происходящее, вслѣдъ за этимъ вращеніемъ, поступательное движеніе равно PP' , переносящее P изъ P въ P' , переноситъ точку Q изъ q въ S , отстоящую отъ Q на разстояніи $QS = PN$.

Итакъ: *перемѣщеніе тѣла изъ 1-го заданнаго положенія въ какое угодно 2-ое заданное положеніе всегда можетъ быть произведено вращеніемъ около некоторой оси QS и поступательнымъ движеніемъ по направленію этой самой оси. Такая ось называется центральной.*

Такое перемѣщеніе называется винтовымъ. Центральная ось называется также винтовой осью.

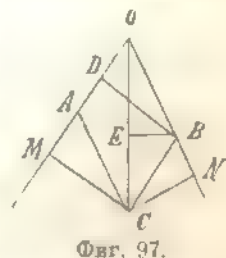
Положимъ, что уголъ θ безконечно малъ и что данное перемѣщеніе складается изъ вращенія ωdt около оси PR и изъ поступательнаго движенія $vd t$, тогда:

$$NP = PP' \sin(P'PR) = vdt \cdot \sin(P'PR)$$

$$\theta = \omega$$

и предыдущая теорема обращается въ такую: если данное перемѣщеніе складается изъ вращенія ωdt около оси PR и поступательнаго движенія $vd t$, происходящаго въ направленіи $P'P'$, то для нахожденія центральной оси поступаемъ такъ: откладываемъ длину $y = \frac{r \cdot \sin(P'PR)}{\omega}$ отъ P перпендикулярно къ плоскости $P'PR$ въ ту сторону, въ которую движется P' . Прямая параллельная къ PR , проведенная чрезъ конецъ отложенной длины y , будетъ центральной осью.

§ 263. Сложеніе безконечно малыхъ вращеній, происходящихъ около двухъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ. Будемъ вращать тѣло въ теченіи безконечно малаго промежутка dt около оси OA (фиг. 97) со скоростью ω и въ такомъ направленіи, чтобы точки, лежащія въ плоскости чертежа внутри угла AOB , опускались подъ лежащимъ горизонтально чертежомъ. Въ то же самое время будемъ вращать тѣло около оси OB со скоростью ω въ такомъ направленіи, чтобы точки, лежащія въ плоскости чертежа внутри угла AOB , поднимались надъ чертежомъ. Этого можно достигнуть, вращая, напримѣръ, тѣло около матеріальной оси OA со скоростью ω и вращая въ то же самое время самую ось OA около оси OB со скоростью ω . Напомнимъ, что мы пока разсматриваемъ только безконечно малые вращенія, происходящія въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt .



Фиг. 97.

Отложимъ на оси OA длину OA пропорциональную скорости ω , и на оси OB длину OB пропорциональную скорости ω_1 . Построимъ на OA и OB параллелограммъ и проведемъ въ немъ диагональ OC . Опустимъ изъ C на оси перпендикуляры CM и CN . Вслѣдствіе вращенія ω точка C опускается подъ чертежъ на разстояніе ω . CM . Вслѣдствіе вращенія ω_1 точка C поднимается надъ чертежъ на разстояніе ω' . CN . Вслѣдствіе допущенной пропорциональности точка C опустится на разстояніе пропорциональное OA . CM , то есть пропорциональное площади всего параллелограмма, и она же поднимется на разстояніе OB . CN пропорциональное площади того же параллелограмма. Слѣдовательно точка C поднимется на столько же, насколько опустится. Итакъ, точка C останется въ покоѣ. Но если O неподвижна и C неподвижна, то и всѣ точки прямой OC и ея продолженій неподвижны. Для всѣхъ же точекъ, не лежащихъ на диагонали, не будетъ существовать, какъ не трудно въ этомъ убѣдиться, равенства опусканія и поднятія. Слѣдовательно: *два бесконечно малыхъ вращенія со скоростями ω и ω_1 около осей OA и OB экивалентны въ одно вращеніе около диагонали параллелограмма, построеннаго на сторонахъ, отложенныхъ отъ O по этимъ осямъ и пропорциональныхъ скоростямъ ω и ω' .*

Опредѣлимъ теперь скорость Ω вращенія, получаемого около диагонали. Если вращенія ω и ω_1 сложатся, дадутъ вращеніе Ω , то отъ сложения вращеній Ω въ обратную сторону и вращенія ω должно получиться вращеніе ω' , которое оставляетъ точки лежащія на оси OB неподвижными. Разсмотримъ перемѣщеніе точки B при вращеніи ω въ прежнемъ и Ω въ обратномъ направленіи. Опустимъ изъ B перпендикуляры BD и BE на OA и OC . Вращеніе ω опускаетъ B на ω . BD . Вращеніе Ω перемѣщаетъ B на Ω . BE . Для того, чтобы, какъ только что было указано, точка B , лежащая на оси OB , оставалась въ покоѣ, надо чтобы:

$$\omega \cdot BD = \Omega \cdot BE$$

или чтобы:

$$OC \cdot BD = \Omega \cdot BE$$

Но $OC \cdot BD =$ площади параллелограмма $ABCO$, которая равна также $OC \cdot BE$. Слѣдовательно:

$$OC \cdot BE = \Omega \cdot BE.$$

Отсюда:

$$\Omega = OC.$$

Итакъ: скорость вращенія Ω , составная изъ ω и ω' , измѣряется диагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ ω и ω' .

Замѣтимъ, что потребовалось поднятіе точки B при вращеніи Ω взятомъ въ обратномъ направленіи. Слѣдовательно само Ω совершается такъ, что опускаетъ точку B .

Такъ какъ всякое вращеніе можетъ происходить и въ ту и въ другую сторону около оси, то вращенія, происходящія въ одну сторону, счи-

таются положительными, происходящая же въ другую сторону — отрицательными. Оказывается, что ихъ (то есть угловыя скорости), удобно изображать длинами, откладываемыми по осямъ. Условимся откладывать ихъ такъ, чтобы *лѣва, смотрящему по направлению оси въ сторону, въ которую откладывается положительное вращение, оно представлялось бы совершающимся по направлению противоположнаго движению стрѣлки часовъ*. Не трудно видѣть, что согласно этому правилу были отложены на (фиг. 97) вращения: ω опускающее точку C , ω поднимающее точку C и ω опускающее точку B .

Результатъ всѣхъ выводовъ этого параграфа можетъ быть выраженъ слѣдующимъ образомъ:

Угловыя скорости вращений могутъ быть представляемы векторами, откладываемыми по осямъ вращений пропорционально ихъ угловымъ скоростямъ. При такомъ изображеніи, безконечно-малыя вращенія около осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, складываются по правилу параллелограмма.

Отсюда слѣдуетъ обратное: данное безконечно малое вращеніе можетъ быть разложено на два составляющихъ безконечно малыхъ вращеній по правилу параллелограмма.

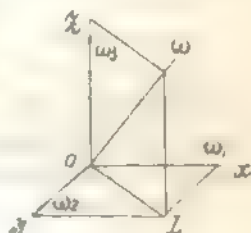
§ 264. Разложеніе безконечно малаго вращенія на три взаимно перпендикулярныя составляющія вращенія. Если дано безконечно малое ω вращеніе ω около оси OM (фиг. 98), то согласно § 263, его можно разложить на вращеніе ω_z около оси z и на вращеніе около OL , которое, въ свою очередь, разлагается на вращеніе ω_1 около оси x и на вращеніе ω_2 около оси y .

Не трудно видѣть, что:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_z^2} \dots (590)$$

и что:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega \cdot \cos(\omega, x) \\ \omega_2 &= \omega \cdot \cos(\omega, y) \\ \omega_z &= \omega \cdot \cos(\omega, z) \end{aligned} \dots (591)$$



Фиг. 98

§ 265. Сложеніе безконечно малыхъ вращеній, происходящихъ около взаимно параллельныхъ осей. Положимъ, что даны два безконечно малыхъ вращенія со скоростями ω и ω около осей OA и OA' параллельныхъ между собою и находящихся на разстояніи a одна отъ другой. Прове-

*) Вращеніе безконечно мало, потому что предполагается совершающимся въ теченіи безконечно малаго времени dt и повораживать тѣло въ безконечно малый уголъ ωdt , но угловая скорость его ω можетъ быть конечною величиною. Слѣдовало бы точнѣе сказать *безконечно малое вращеніе со скоростью ω* . Но для ясности рѣчи говорить и такъ, какъ сказано въ текствѣ.

демь параллельную къ нимъ ось $O'A''$ на разстояніи x отъ OA (фиг. 99). Вращеніе ω опускаетъ всякую точку лежащую на $O'A''$ подь плоскость чертежа на разстояніе $x\omega dt$. Вращеніе ω' поднимаетъ всякую такую точку на разстояніе $(a - x)\omega' dt$. Для того, чтобы всѣ точки, лежащія на $O'A''$ оставались неподвижными нужно, чтобы:



Фиг. 99.

или

$$x\omega = (a - x)\omega'$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a - x}{x} \dots \dots \dots (592)$$

При этомъ условіи прямая $O'A''$ будетъ неподвижна и будетъ служить осью вращенія Ω , составленнаго изъ вращеній ω и ω' .

Слагая вращенія (Ω) съ вращеніемъ ω , получимъ вращеніе ω' оставляющее ось $O'A'$ неподвижною. Вращеніе ω опускаетъ всякую точку, лежащую на $O'A'$, на разстояніе $a\omega dt$. Вращеніе ($-\Omega$) должно поднимать всякую такую точку на такое разстояніе $(a - x)\Omega dt$, чтобы:

$$a\omega = (a - x)\Omega \dots \dots \dots (593)$$

Исключая x изъ (592) и (593) получимъ:

$$\Omega = \omega + \omega' \dots \dots \dots (594)$$

Уравненіе (591) показываетъ, что равнодѣствующее вращеніе равно суммѣ слагающихъ вращеній, если они взаимно параллельны.

Уравненіе (592) показываетъ, что, въ случаѣ взаимной параллельности составляющихъ вращеній, разстоянія оси равнодѣствующаго вращенія отъ осей слагающихъ вращеній обратно пропорціональны угловымъ скоростямъ составляющихъ вращеній.

Здѣсь опять видна аналогія со сложеніемъ взаимно-параллельныхъ силъ.

§ 266. Пара вращеній. Если вращенія ω и ω' равны по величинѣ, но противоположны по направленію (вращаютъ тѣло въ противоположныя стороны) такъ, что:

$$\omega = -\omega'$$

то Ω оказывается, согласно (594), равнымъ нулю и изъ (592) получаемъ:

$$x = x - a,$$

что можетъ быть только при $x = \infty$. Получился непонятный результатъ, какъ при сложении силъ, составляющихъ пару силъ. Возьмемъ какую нибудь точку M тѣла на разстояніи y отъ OA . Вращеніе ω опускаетъ точку M на разстояніе $y \cdot \omega$. Вращеніе ω' опускаетъ точку M на разстояніе $(y - a)\omega$. Следовательно линейная скорость точки M будетъ:

$$y \cdot \omega + (y - a)\omega' \dots \dots \dots (595)$$

Но, благодаря предположенному равенству $\omega = \omega'$, величина (395) обращается въ

$$a\omega$$

и потому не зависитъ отъ y . Слѣдовательно, всѣ точки M тѣла, на какомъ бы разстояніи y онѣ ни находились отъ OA , обладаютъ одною и тою же скоростью $a\omega$, и проходятъ, слѣдовательно, равные и взаимно-параллельные пути $a\omega dt$. Но такое движеніе есть движеніе поступательное по направленію перпендикулярному къ плоскости, въ которой лежатъ данныя оси.

Два равныя вращенія, совершающіяся около взаимно параллельныхъ осей въ противоположныя стороны, называются *парою вращеній*

Итакъ: *пара безконечно-малыхъ вращеній, происходящихъ со скоростями ω и $(-\omega)$ около взаимно-параллельныхъ осей, находящихся въ разстояніи a одна отъ другой, эквивалентна безконечно малому поступательному движенію со скоростью $a\omega$, происходящему по направленію перпендикулярному къ плоскости, проходящей чрезъ оси данныя вращеній.*

§ 267. Перенесеніе вращенія на параллельную ось. Изъ предыдущаго параграфа слѣдуетъ: *безконечно-малое вращеніе со скоростью ω около оси OA эквивалентно совокупности вращенія съ тою же скоростью ω , происходящему около параллельной оси OA' , находящейся на разстояніи a отъ O , и поступательнаго движенія, происходящаго со скоростью $a\omega$ въ направленіи перпендикулярномъ къ плоскости (OAA') въ ту сторону, въ которую вращается ось OA' вращеніемъ около OA .*

Дѣйствительно, согласно съ предыдущимъ параграфомъ, ω и $(-\omega)$ эквивалентны поступательному движенію $a\omega$. Слѣдовательно ω , вѣдѣтъ съ поступательнымъ движеніемъ $a\omega$, эквивалентны вращенію ω около OA' .

Это правило вполне аналогично правилу перенесенія силы P , изложенному въ § 91-мъ.

Замѣтимъ, что вращенія аналогичны силамъ, а поступательное движеніе $a\omega$ моменту пары. Эта аналогия,

вращенія съ силою

поступательнаго движенія съ моментомъ пары,

подтверждается изложенными теоріями сложения вращеній и сложения силъ.

§ 268. Приведенія данной системы вращеній къ простѣйшимъ системамъ. Повторивъ совершенно тѣ же построенія и разсужденія, которыми мы руководствовались для доказательства приведенія системы данныхъ силъ къ простѣйшимъ системамъ въ §§ 90—99 мы бы доказали соотвѣтственные теоремы относительно вращеній. Но для краткости и вразумительности мы просто выпишемъ доказанныя теоремы статьи и поставимъ рядомъ съ ними соотвѣтствующія теоремы динамики.

Теоремы статики.

1) Всякая система данныхъ силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло приводится къ совокупности пары и силы, направленной по оси этой пары.

Такая совокупность называется *динамью*.

Прямая, по которой направлена въ динамъ сила, называется *центральною осью* или *осью динами*.

2) Всякая система силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло можетъ быть приведена къ совокупности двухъ непараллельныхъ и не пересѣкающихся силъ.

Въ частномъ случаѣ эти силы могутъ оказаться или пересѣкающимися, приводящимися къ одной силѣ, или параллельными приводящимися или къ одной силѣ или къ одной парѣ.

3) Всякая система силъ, дѣйствующихъ на абсолютно твердое тѣло, можетъ быть приведена къ тремъ силамъ X , Y , Z дѣйствующихъ по направлениямъ осей прямоугольныхъ координатъ и къ тремъ парамъ, моменты которыхъ L , M , N направлены по осямъ координатъ.

Послѣднее приведеніе, обозначенное № 3 выяснится изъ слѣдующаго параграфа.

§ 269. Скорости точекъ твердаго тѣла, совершающаго какое-либо движеніе въ пространствѣ. Движеніе твердаго тѣла въ теченіи безконечно малаго промежутка времени dt можетъ быть разсматриваемо, согласно § 261-му, какъ совокупность поступательнаго движенія точки приведенія O и вращенія около оси, проходящей чрезъ O .

Для удобства изслѣдованія скоростей различныхъ точекъ тѣла избежимъ подвижную систему координатъ, именно такую прямоугольную систему осей Ox , Oy , Oz , въ которой начало координатъ O движется, а оси

Теоремы динамики.

1) Всякая система данныхъ вращеній абсолютно твердаго тѣла приводится къ совокупности вращенія около нѣкоторой оси и поступательнаго движенія вдоль этой оси.

Такая совокупность называется *винтовымъ движеніемъ*.

Ось вращенія въ винтовомъ движеніи называется *центральною осью* или *осью винта*.

2) Всякая система вращеній абсолютно твердаго тѣла можетъ быть приведена къ совокупности двухъ вращеній, происходящихъ около двухъ непараллельныхъ и непересѣкающихся осей.

Въ частномъ случаѣ эти вращенія могутъ оказаться или съ пересѣкающимися осями и приводятся къ одному вращенію или съ параллельными осями и приводятся или къ одному вращенію или къ одному поступательному движенію.

3) Всякая система вращеній абсолютно твердаго тѣла можетъ быть приведена къ совокупности трехъ вращеній около осей, параллельныхъ осямъ координатъ и участвующихъ въ поступательномъ движеніи тѣла и къ тремъ поступательнымъ движеніямъ вдоль осей координатъ.

и, согласно (596), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u + \omega_2 z - \omega_3 y = u' + \omega_2' (z - \zeta) - \omega_3' (y - \eta) \\ \frac{dy}{dt} &= v + \omega_3 x - \omega_1 z = v' + \omega_3' (x - \xi) - \omega_1' (z - \zeta) \\ \frac{dz}{dt} &= w + \omega_1 y - \omega_2 x = w' + \omega_1' (y - \eta) - \omega_2' (x - \xi) \end{aligned} \right\} \dots (597)$$

Уравненія (597) справедливы для всякой точки P , стало быть для всякихъ x, y, z , но это вѣрно только въ томъ случаѣ, если коэффициенты при x, y, z въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій равны коэффициентамъ при тѣхъ же величинахъ въ правыхъ частяхъ, то есть должны существовать равенства

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_1' \\ \omega_2 &= \omega_2' \\ \omega_3 &= \omega_3' \end{aligned} \dots (598)$$

§ 271. Опредѣленіе бесконечно-малаго винтового движенія твердаго тѣла по компонентамъ $u, v, w, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Если за центръ приведенія, для котораго давы компоненты $u, v, w, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, была принята точка O , а теперь мы хотимъ взять центръ P приведенія на оси винта, то, согласно (598), компоненты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ останутся безъ измѣненія. Если скорость равнодѣйствующаго вращенія около оси винта есть Ω , то, согласно (591):

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos (\Omega, x) = \frac{\omega_1}{\Omega} \\ \cos \beta &= \cos (\Omega, y) = \frac{\omega_2}{\Omega} \\ \cos \gamma &= \cos (\Omega, z) = \frac{\omega_3}{\Omega} \end{aligned} \dots (599)$$

гдѣ α, β, γ суть углы наклоненія оси винта къ осямъ координатъ.

Если V была скорость поступательнаго движенія въ первоначальномъ приведеніи и V_0 скорость поступательнаго движенія вдоль оси винта, то

$$V_0 = V \cdot \cos (V, \Omega) = u \cdot \cos \alpha + v \cdot \cos \beta + w \cdot \cos \gamma \dots (600)$$

Исключая косинусы изъ (600) и (599), получимъ:

$$\Omega \cdot V_0 = u \omega_1 + v \omega_2 + w \omega_3 \dots (601)$$

Если x, y, z суть координаты точки P , лежащей на оси винта, то поступательная скорость этой точки во второмъ приведеніи направлена по винту и потому, согласно съ (596):

$$\frac{u + \omega_2 z - \omega_3 y}{\omega} = \frac{v + \omega_3 x - \omega_1 z}{\omega_2} = \frac{w + \omega_1 y - \omega_2 x}{\omega_3} \dots (602)$$

Эти уравненія (602) и служат уравненіями оси винта.

Изъ (602) получимъ:

$$\frac{\omega_1 (x + \omega_2 z - \omega_3 y)}{\omega_1^2} = \frac{\omega_2 (x + \omega_3 z - \omega_1 y)}{\omega_2^2} = \frac{\omega_3 (x + \omega_1 y - \omega_2 z)}{\omega_3^2} . \quad (603)$$

Прилагая теорему о суммѣ предыдущихъ и суммѣ послѣдующихъ, находимъ, что каждая изъ дробей уравненій (603) или, что то же самое, каждая изъ дробей уравненій (602) равна:

$$\frac{x \cdot \omega_1 + y \cdot \omega_2 + z \cdot \omega_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

или, согласно (601)

$$\frac{\Gamma_0}{\Omega} (604)$$

Это отношеніе поступательной скорости вдоль оси винта и вращательной скорости вокругъ оси винта называется *параметромъ* винта или *спиралью*.

§ 272. Инварианты движенія твердаго тѣла. Какую бы точку мы ни принимали за центръ приведенія данного движенія твердаго тѣла, для всякаго такого приведенія величина

$$x\omega_1 + y\omega_2 + z\omega_3 (605)$$

будетъ одна и та же, потому что движеніе выражается винтомъ съ поступательною скоростью V_0 и вращательною Ω , а, согласно (601), величина (605) равна $V_0 \Omega$. Поэтому эта величина называется *инвариантомъ* движенія.

Равнодійствующее вращеніе Ω тоже не измѣняется отъ перемѣны центра приведенія и называется поэтому *инвариантомъ вращенія*.

Если инвариантъ компонентъ, равный $V_0 \Omega$, равенъ нулю, то или $V_0 = 0$ и движеніе приводится къ одному вращательному; или $\Omega = 0$, и движеніе приводится къ одному поступательному (ср. § 99)

§ 273. Подвижная система осей координатъ. Для изслѣдованія движенія твердаго тѣла удобно пользоваться подвижною системою координатныхъ осей, неизмѣнимо соединенныхъ съ тѣломъ. Мы уже пользовались такою системою подвижныхъ осей ξ, η, ζ , изучая частный случай движенія твердаго тѣла, именно движеніе его около неподвижной оси. Но тогда въ этой системѣ только оси η и ζ были подвижными, а ось ξ была неподвижна.

При изученіи движенія твердаго тѣла, имѣющаго только одну неподвижную точку, обыкновенно пользуются двумя системами осей координатъ, имѣющими общее начало въ неподвижной точкѣ: одна система неподвижна, а другая, подвижная, неизмѣнимо соединена съ тѣломъ. Между координатами (ξ, η, ζ) какой-нибудь точки тѣла, отнесенной къ подвижной

системъ осей и координатами (x, y, z) той же самой точки, отнесенной къ неподвижнымъ осямъ существуютъ выводимыя въ аналитической геометріи формулы преобразованія:

$$\begin{aligned}x &= \xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma \\y &= \xi\alpha' + \eta\beta' + \zeta\gamma' \\z &= \xi\alpha'' + \eta\beta'' + \zeta\gamma''\end{aligned}$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \dots$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ подвижными осями съ неподвижными. Между этими косинусами существуютъ извѣстныя соотношенія

$$\left. \begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 &= 1 \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0 \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (606)$$

Пользуясь этими формулами, изслѣдуютъ движеніе подвижной системы осей и движеніе тѣла около неподвижной точки.

Этотъ способъ примѣняемъ былъ Эйлеромъ, Лагранжемъ и сдѣлался классическимъ. Тѣмъ не менѣе мы будемъ придерживаться другого способа, практикуемаго преимущественно англійскими учеными, потому что англійскій способъ требуетъ меньшаго числа вспомогательныхъ формулъ, Раутъ (Routh) въ своей *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies* говоритъ по этому поводу, что мы не вполне пользуемся выгодами, представляемыми подвижною системою осей координатъ, если, какъ это происходитъ въ классическомъ способѣ, пользуемся въ теченіи всего движенія еще и системою неподвижныхъ осей. Въ англійскомъ же способѣ неподвижными осями пользуются только въ началѣ и въ концѣ изслѣдованія. Отъ классическаго англійскій способъ отличается тѣмъ, что въ немъ за неподвижныя оси (вводимыя только въ началѣ изслѣдованія) принимаются оси, совпадающія въ моментъ t съ подвижными осями, какъ это яснѣе будетъ видно изъ слѣдующаго параграфа.

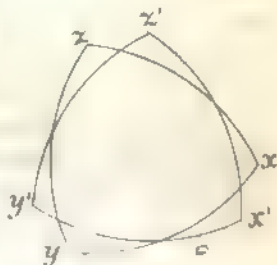
§ 274. Кинематическія соотношенія между проложеніями вектора на подвижныя и на неподвижныя оси. Скорости, ускоренія, силы, какъ мы видѣли, могутъ быть представлены векторами, подчиняющимися правилу параллелограмма. Въ настоящемъ параграфѣ, въ видахъ общности, изслѣдуемъ проложенія какого бы то ни было вектора R .

Пусть Ox, Oy, Oz (фиг. 101) суть положенія подвижныхъ осей въ моментъ t (точнѣе говоря, въ концѣ времени t протекшаго отъ начала времени). По истеченіи еще безконечно малаго промежутка dt времени эти подвижныя оси примутъ положеніе Ox', Oy', Oz' . Эта переувѣва положенія подвижныхъ осей можетъ быть достигнута, согласно §§ 252 и 254, вра-

щеніемъ около мгновенной оси OJ на уголъ θdt . Пусть $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ будутъ проложива угловой скорости θ на оси Ox, Oy, Oz . Такимъ образомъ оси координатъ переходятъ отъ занимаемаго ими въ моментъ t положенія Ox, Oy, Oz въ положенія Ox', Oy', Oz' занимаемое ими въ моментъ $t + dt$, при помощи трехъ вращеній $\theta_1 dt, \theta_2 dt, \theta_3 dt$ около Ox, Oy, Oz ,

Обозначимъ проложива вектора R на оси Ox, Oy, Oz чрезъ U, V, W . Въ теченія времени dt векторъ R измѣняется по величинѣ и по направленію. Въ теченія этого же времени dt измѣняется и положеніе осей координатъ, такъ что проложива вектора R , въ концѣ времени $t + dt$ на оси Ox', Oy', Oz' будутъ $U + dU, V + dV, W + dW$.

Опишемъ около O сферу радиусомъ равнымъ единицѣ, и пусть оси координатъ пересѣкаютъ поверхность этой сферы въ точкахъ x, y, z, x', y', z' , (фиг. 101), такъ что получаются два сферическихкихъ треугольника x, y, z и x', y', z' , стороны которыхъ суть дуги большихъ круговъ, каждая въ 90° . Проложива вектора R на ось Ox въ концѣ времени $t + dt$ равно $(U + dU) \cos(x, x') + (V + dV) \cos(x, y') + (W + dW) \cos(x, z')$. (607)



Фиг. 101.

Вращенія около Ox и Oy не могутъ измѣнить дуги xy . По вращеніе около Oz удаляетъ точку y' отъ точки x на дугу $\theta_3 dt$. Точно такъ же вращенія около Ox и Oz не измѣняютъ дуги xz ; но вращеніе около Oy приближаетъ точку z' къ точкѣ x на дугу $\theta_2 dt$. Поэтому:

$$\text{дуга } xy' = \text{дугѣ } xy + \theta_3 dt,$$

$$\text{дуга } xs' = \text{дугѣ } xs + \theta_2 dt.$$

Косинусъ угла, измѣряющаго дугу xx' отличается отъ единицы на квадратъ безконечно малой величины. Подставляя найденныя величины въ (607), получимъ, что проложива вектора R , въ концѣ времени $t + dt$, на Ox равно

$$U + dU - V\theta_3 dt + W\theta_2 dt \dots \dots \dots (608)$$

Раздѣливъ полученное проложиваніе U приращеніе $dU - V\theta_3 dt + W\theta_2 dt$ на dt и перейдя къ предѣлу, получимъ:

$$\frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2 \dots \dots \dots (609)$$

Но процессомъ дѣленія на dt и переходомъ къ предѣлу мы получили скорость проложиванія конца вектора R на ось x въ концѣ времени t . Обозначимъ ее чрезъ U_1 . Точно такъ же получимъ скорости V_1 и W_1 проложиваній конца вектора R на неподвижныя оси y и z .

Именно:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{dU}{dt} - V\theta_3 + W\theta_2 \\ V_1 &= \frac{dV}{dt} - W\theta_1 + U\theta_3 \\ W_1 &= \frac{dW}{dt} - U\theta_2 + V\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (610)$$

Таковы формулы, выражающія скорости U_1, V_1, W_1 проложений конца вектора R на неподвижныя оси Ox, Oy, Oz чрезъ проложенья U, V, W самого вектора на оси подвижныя, совпадающія въ концѣ времени t съ неподвижными. Это основныя формулы англійскаго способа. Изъ нихъ непосредственно получаются формулы слѣдующаго параграфа.

Приложимъ формулы (610) къ употребительнѣйшимъ, въ динамикѣ тѣла, векторамъ.

1) Если векторъ R есть радиусъ-векторъ точки (x, y, z) тѣла, то U, V, W суть координаты x, y, z этой точки; U_1, V_1, W_1 суть проложенья скорости этой точки на неподвижныя оси. Формулы (610) даютъ въ этомъ случаѣ:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} - y\theta_3 + z\theta_2 \\ v &= \frac{dy}{dt} - z\theta_1 + x\theta_3 \\ w &= \frac{dz}{dt} - x\theta_2 + y\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (611)$$

Здѣсь x, y, z суть координаты точки относительно подвижной системы осей координатъ; u, v, w суть проложенья скорости точки на неподвижныя оси координатъ.

2) Если векторъ R есть скорость точки (x, y, z) , то U, V, W суть проложенья u, v, w этой скорости на подвижныя оси; U_1, V_1, W_1 суть проложенья ускорения той же точки на неподвижныя оси. Формулы (610) даютъ:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{du}{dt} - v\theta_3 + w\theta_2 \\ Y &= \frac{dv}{dt} - w\theta_1 + u\theta_3 \\ Z &= \frac{dw}{dt} - u\theta_2 + v\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (612)$$

3) Если векторъ R есть угловая скорость ω тѣла около мгновенной оси, то U, V, W суть проложенья ея $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ на подвижныя оси. Если при этомъ обозначимъ чрезъ $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ проложенья скорости ω на неподвижныя оси, то U_1, V_1, W_1 будутъ соответственно равны

$$\frac{d\omega_x}{dt}, \quad \frac{d\omega_y}{dt}, \quad \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Формулы (610) дадутъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{d\omega_1}{dt} - \omega_2\theta_3 + \omega_3\theta_2 \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{d\omega_2}{dt} - \omega_3\theta_1 + \omega_1\theta_3 \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{d\omega_3}{dt} - \omega_1\theta_2 + \omega_2\theta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (613)$$

Если подвижныя оси неизмѣнимо соединены съ тѣломъ, то $\omega_1 = \theta_1$; $\omega_2 = \theta_2$, $\omega_3 = \theta_3$, и (613) принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{d\omega_1}{dt} \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \frac{d\omega_2}{dt} \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{d\omega_3}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (614)$$

§ 275. Эйлеровы дифференціальныя уравненія движенія абсолютнаго твердаго тѣла около неподвижной точки. Пусть (x, y, z) суть координаты какой-нибудь точки m абсолютно твердаго тѣла, отнесенныя къ неподвижной системѣ осей Ox, Oy, Oz . Самое же тѣло имѣетъ только одну неподвижную точку O . Для тѣла возможны всякія вращения около осей Ox, Oy, Oz ; поэтому къ нему применимъ законъ площадей, выражающійся уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \Sigma (xY - yX) = N \\ \Sigma m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \Sigma (yZ - zY) = L \\ \Sigma m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \Sigma (zX - xZ) = M \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (322)$$

гдѣ L, M, N проложенія моментовъ равнодѣйствующей пары; X, Y, Z проложенія дѣйствующихъ силъ.

Согласно съ формулами (596):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \omega_z y - \omega_y z \\ \frac{dy}{dt} &= \omega_x z - \omega_z x \\ \frac{dz}{dt} &= \omega_y x - \omega_x y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (615)$$

Дифференцируя, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= z \frac{d\omega_y}{dt} - y \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_z (y\omega_x - x\omega_y) - \omega_x (x\omega_z - z\omega_x) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= x \frac{d\omega_z}{dt} - z \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_x (z\omega_y - y\omega_z) - \omega_y (y\omega_x - x\omega_y) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= y \frac{d\omega_x}{dt} - x \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_y (x\omega_z - z\omega_x) - \omega_z (x\omega_y - y\omega_z) \end{aligned} \right\} \quad (616)$$

Если $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ суть угловые скорости тѣла около осей OA, OB, OC , неизмѣнимо соединенныхъ съ тѣломъ и совпадающихъ въ концѣ времени t съ неподвижными осями координатъ, то $\omega_x = \omega_1$; $\omega_y = \omega_2$; $\omega_z = \omega_3$; и, согласно (614):

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{d\omega_1}{dt}; \quad \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{d\omega_2}{dt}; \quad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d\omega_3}{dt}.$$

Если за подвижныя оси примемъ главныя оси инерціи тѣла для неподвижной точки, то $\sum myz = 0$; $\sum mzx = 0$, $\sum mxy = 0$. Подставимъ, при такихъ предположеніяхъ, вторыя производныя координатъ по времени изъ (616) въ (322). При этомъ, благодаря вытекающимъ изъ нашихъ предположеній упрощеніямъ, результатъ получится тотъ же, если мы предварительно отбросимъ въ уравненіи, опредѣляющемъ $\frac{d^2x}{dt^2}$, члены, не содержащіе y , и въ уравненіи, опредѣляющемъ $\frac{d^2y}{dt^2}$ — всѣ члены не содержащіе x . Такимъ образомъ получимъ

$$\sum m (x^2 + y^2) \cdot \frac{d\omega_1}{dt} + \sum m (x^2 - y^2) \omega_1 \omega_2 = N.$$

$$\dots \dots \dots$$

Если A, B, C суть главные моменты инерціи тѣла относительно неподвижной точки, то пользуясь формулами (336) получимъ:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C) \omega_2 \omega_3 &= L \\ B \frac{d\omega_2}{dt} - (C - A) \omega_3 \omega_1 &= M \\ C \frac{d\omega_3}{dt} - (A - B) \omega_1 \omega_2 &= N \end{aligned} \right\} \quad (617)$$

гдѣ LMN суть моменты паръ по осямъ, подвижнымъ, соединеннымъ съ тѣломъ.

Таковы выведенныя Эйлеромъ общія дифференціальныя уравненія движенія абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки.

§ 276. Движеніе абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки подъ вліяніемъ силъ, приложенныхъ именно къ этой точкѣ. Если силы приложены только къ той точкѣ тѣла, которая неподвижна, то онѣ не про-

изводить никакого дѣйствія на тѣло, и задача рѣшается такъ, какъ будто бы на тѣло не дѣйствовали никакія силы. Впослѣдствіи мы увидимъ, что этотъ случай движенія твердаго тѣла около точки имѣетъ въ динамикѣ особенно важное значеніе. Такое движеніе совершаетъ, напримѣръ, тяжелое твердое тѣло около неподвижной точки, находящейся въ центрѣ тяжести (подпертое въ центрѣ тяжести); дѣйствующая на него сила тяжести приложена въ центрѣ тяжести и уничтожается сопротивленіемъ точки опоры, и тѣло оказывается неподверженнымъ дѣйствіямъ какихъ либо силъ.

Въ этомъ случаѣ все X, Y, Z равны нулю; поэтому и моменты L, M, N равны нулю; Эйлеровы уравненія (617) принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} - (B - C) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ B \frac{d\omega_2}{dt} - (C - A) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ C \frac{d\omega_3}{dt} - (A - B) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (618)$$

и могутъ быть интегрированы слѣдующимъ образомъ.

Помножимъ 1-ое изъ этихъ уравненій (618) на ω_1 , второе на ω_2 , третье на ω_3 , и сложимъ, получимъ:

$$A\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + B\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + C\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

Интегрируя, получимъ:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \quad (619)$$

гдѣ T есть постоянное интегрированія.

Помножимъ теперь 1-ое изъ уравненій (618) на $A\omega_1$, 2-ое на $B\omega_2$, 3-е на $C\omega_3$, и сложимъ. Получимъ:

$$\begin{aligned} A^2\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + B^2\omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + C^2\omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= \\ &= \omega_1\omega_2\omega_3 [A(B - C) + B(C - A) + C(A - B)] = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя, получимъ:

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2 \quad (620)$$

гдѣ G есть постоянное интегрированія.

Замѣтимъ, что

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \omega^2 \quad (621)$$

Откуда:

$$\omega_1 \frac{d\omega_1}{dt} + \omega_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \omega_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \omega \frac{d\omega}{dt} \quad (622)$$

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (618) на $\frac{\omega_1}{A}$, на 2-е $\frac{\omega_2}{B}$, 3-е на $\frac{\omega_3}{C}$ и

сложимъ. Получимъ, благодаря (622):

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \left[\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{A} + \frac{A-B}{C} \right] \omega_1 \omega_2 \omega_3 = - \frac{(B-C)(C-A)(A-B)}{ABC} \omega_1 \omega_2 \omega_3. \quad (623)$$

Но изъ (619), (620) и (622) получаемъ:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{BC}{(A-C)(A-B)} \cdot (-\lambda_1 + \omega^2) \\ \omega_2^2 &= \frac{CA}{(B-A)(B-C)} \cdot (-\lambda_2 + \omega^2) \\ \omega^2 &= \frac{AB}{(C-B)(C-A)} \cdot (-\lambda_3 + \omega^2) \end{aligned} \right\} \dots \dots (624)$$

гдѣ

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{T(B+C) - G^2}{BC} \\ \lambda_2 &= \frac{T(C+A) - G^2}{AC} \\ \lambda_3 &= \frac{T(A+B) - G^2}{AB} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (625)$$

Подставляя найденныя величины ω_1 , ω_2 , ω_3 , изъ (624) въ (623), получимъ:

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{4} (\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2)(\lambda_3 - \omega^2) \dots \dots \dots (626)$$

или

$$dt = \frac{\omega d\omega}{\frac{1}{4} (\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2)(\lambda_3 - \omega^2)} \dots \dots \dots (627)$$

Отсюда:

$$t = \int \frac{\omega d\omega}{\frac{1}{4} (\lambda_1 - \omega^2)(\lambda_2 - \omega^2)(\lambda_3 - \omega^2)} \dots \dots \dots (628)$$

Этотъ интегралъ можетъ быть приведенъ къ хорошо изслѣдованному эллиптическому интегралу.

Итакъ мы получали три *первыхъ* интеграла дифференціальныхъ уравненій (618), именно: (619), (620) и (628).

Впослѣдствіи мы покажемъ, какъ, пользуясь только интегралами (619) и (620), Poinsot далъ полную геометрическую картину движенія, определяемаго дифференціальными уравненіями (618), а теперь изложимъ полное интегрированіе уравненій (618) по способу Kirchhoff'a.

§ 277. Интегрированіе уравненій движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла по способу Кирхгофа. Одинъ изъ полученныхъ нами интегра-

Если опредѣлимъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ изъ формулъ:

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi) &= (t - \tau) \lambda \\ \omega_1 &= a \Delta am (t - \tau) \lambda \\ \omega_2 &= b \cdot \sin am (t - \tau) \lambda \\ \omega_3 &= c \cos am (t - \tau) \lambda \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (633)$$

то этими значеніями удовлетворятся дифференціальныя уравненія (618). Дѣйствительно, вставляя $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, опредѣляемыя изъ (633) въ (618), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \Delta ak^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= (B - C) bc \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ -\lambda Bb \cdot \cos \varphi \cdot \Delta(\varphi) &= (A - C) ac \cdot \Delta(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ -\lambda Cc \cdot \sin \varphi \cdot \Delta(\varphi) &= (A - B) ab \cdot \sin \varphi \cdot \Delta(\varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots (634)$$

которые окажутся тождествами, если выберемъ введенныя нами постоянныя a, b, c, λ такъ, чтобы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{(A - B)}{C} &= -\frac{c\lambda}{ab} \\ \frac{(A - C)}{B} &= -\frac{b\lambda}{ac} \\ \frac{(B - C)}{A} &= -k \frac{a\lambda}{bc} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (635)$$

Такой выборъ постоянныхъ возможенъ. Дѣйствительно, полагая $t = \tau$ получимъ изъ (633):

$$\omega_1 = a; \quad \omega_2 = 0; \quad \omega_3 = c,$$

такъ что (619) и (620) дадутъ

$$\left. \begin{aligned} \Delta a^2 + C c^2 &= T \\ A^2 a^2 + C^2 c^2 &= G^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (636)$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= \frac{g^2 - CT}{A(A - C)} \\ C^2 &= \frac{AT - G^2}{C(A - C)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (637)$$

Для 2-ое уравненіе изъ (635) на 1-ое, получимъ:

$$\frac{b}{c} = \frac{(A - C) C}{(A - B) B}$$

Слѣдовательно сообразно съ (637):

$$b^2 = \frac{AT - G^2}{B(A - B)} \dots \dots \dots (638)$$

Перемноживъ 1-ое и 2-ое уравненія (635) и сообразуясь съ (637) и (638), получимъ:

$$\lambda^2 = \frac{(A-B)(G^2-CT)}{ABC} \dots \dots \dots (639)$$

Изъ (635) получимъ:

$$k^2 = \frac{(B-C)(AT-G^2)}{(A-B)(G^2-CT)} \dots \dots \dots (640)$$

Если $G^2 > BT$ и если $A > B > C$, то получаемъ дѣйствительныя рѣшенія для постоянныхъ a, b, c, λ, k . Вставляя ихъ въ (633), получимъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ въ конечной формѣ. Уравненія (633) и суть окончательные интегралы дифференціальныхъ уравненій (618).

§ 278. Моменты количества движенія относительно неподвижныхъ осей. Въ 143-мъ мы видѣли, что моментъ количества движенія около неподвижной оси z равенъ

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \dots \dots \dots (641)$$

Опредѣляя моментъ количества движенія тѣла, вращающагося около неподвижной точки, то-есть полагая $u = v = w = 0$, получимъ изъ (597)

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= x\omega_y - y\omega_x \\ \frac{dy}{dt} &= x\omega_z - z\omega_x \\ \frac{dz}{dt} &= y\omega_x - x\omega_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (642)$$

Вставляя въ (641) получимъ:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m (x^2 + y^2) \cdot \omega_z - (\Sigma m xz) \omega_x - (\Sigma m yz) \omega_y.$$

Точно также выведемъ моменты количества движенія около осей y и x . Называя ихъ чрезъ h_x, h_y, h_z , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = [\Sigma m (y^2 + z^2)] \omega_x - (\Sigma m yx) \omega_y - (\Sigma m yz) \omega_z \\ h_y &= \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = [\Sigma m (z^2 + x^2)] \omega_y - (\Sigma m zy) \omega_x - (\Sigma m xz) \omega_z \\ h_z &= \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = [\Sigma m (x^2 + y^2)] \omega_z - (\Sigma m xz) \omega_x - (\Sigma m yz) \omega_y \end{aligned} \right\} (643)$$

§ 279. Моменты количества движенія относительно главныхъ централь-ныхъ осей инерціи. Если за подвижныя оси выберемъ главные централь-ныя оси инерціи тѣла, движущагося около центра тяжести, а за непод-

вижныя оси изберемъ такія, которыя совпадаютъ съ подвижными въ моментъ t , то уравненія (643) дадутъ моменты количества движенія h_1, h_2, h_3 около главныхъ центральныхъ осей инерции, если въ правыхъ частяхъ каждаго уравненія послѣдніе члены отбросимъ, а въ первыхъ сдѣлаемъ замѣну по формуламъ (336). Получимъ:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= A\omega_1 \\ h_2 &= B\omega_2 \\ h_3 &= C\omega_3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (644)$$

§ 280. Начало площадей въ движеніи тяжелаго абсолютно-твёрдаго тѣла около центра тяжести. Абсолютно твёрдое тѣло, имѣющее неподвижную точку въ центрѣ тяжести, можетъ совершать вращенія около всякой оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, и потому движеніе такого тѣла подчиняется закону площадей. Но на основаніи этого закона, согласно (323) моменты количества движенія около неподвижныхъ осей координатъ остаются *постоянными* въ теченіи всего движенія и могутъ быть разсматриваемы какъ продолженія, на неподвижныя оси координатъ, момента количества движенія около нѣкоторой неподвижной оси, проходящей чрезъ начало и перпендикулярной, слѣдовательно, къ *неизмѣняемой* плоскости.

Слѣдовательно, моментъ количества движенія около такой неподвижной оси (*главный моментъ* количества движенія) тоже постояненъ, потому что продолженія его постоянны.

Положимъ, что *тяжелое* абсолютно твёрдое тѣло, подпертое въ центрѣ тяжести, приведено въ движеніе парю силъ мгновенныхъ (импульсивною парю), моментъ которой G .

Моментъ количества движенія будетъ равенъ моменту G импульсивной пары въ началѣ движенія. Но и въ теченіи всего послѣдующаго времени главный моментъ количества движенія остается, согласно сказанному въ настоящемъ параграфѣ, равнымъ G и направленъ перпендикулярно къ неподвижной плоскости.

Обозначимъ чрезъ α, β, γ углы, составляемые моментомъ G съ главными центральными осями инерции тѣла. Тогда, согласно (644):

$$\left. \begin{aligned} A\omega_1 &= G \cos \alpha \\ B\omega_2 &= G \cos \beta \\ C\omega_3 &= G \cos \gamma \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (645)$$

Возведя эти равенства въ квадратъ и сложивъ получимъ:

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2.$$

Итакъ, уравненіе (620), выведенное въ § 276-мъ, есть не что иное, какъ *интегралъ площадей* отъ дифференціальныхъ уравненій (618).

Мы видимъ изъ сказаннаго въ этомъ параграфѣ, что количество движенія остается постоянно эквивалентнымъ импульсивной парѣ G , сообщившей тѣлу движеніе. Отсюда слѣдуетъ, что въ каждый послѣдующій моментъ движеніе можетъ быть остановлено импульсивною парю ($-G$).

Косинусы угловъ наклоненія мгновенной оси вращенія къ главнымъ центральнымъ осямъ инерціи тѣла пропорциональны $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Изъ (645), поэтому, слѣдуетъ: если движеніе тѣлу сообщено было вращеніемъ около оси, составлявшей съ главными центральными осями углы, косинусы которыхъ равны l, m, n , то $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ пропорциональны Al, Bm, Cn .

§ 281. Начало сохраненія живой силы въ движеніи тяжелаго абсолютно твердаго тѣла, вращающагося около центра тяжести. Согласно (335):

$$\frac{A\omega_1^2}{2} = \text{живая сила вращенія } \omega_1$$

$$\frac{B\omega_2^2}{2} = \text{живая сила вращенія } \omega_2$$

$$\frac{C\omega_3^2}{2} = \text{живая сила вращенія } \omega_3$$

Слѣдовательно живая сила изслѣдуемаго движенія равна

$$\frac{1}{2} [A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2].$$

Но сила тяжести уничтожается, въ разсматриваемомъ случаѣ, сопротивленіемъ точки опоры, помѣщенной въ центрѣ тяжести. Поэтому на тѣло не дѣйствуютъ никакія силы; работа вѣншихъ силъ равна нулю, и потому, согласно (306) живая сила остается постоянною; обозначая ее черезъ $\frac{T}{2}$, получимъ:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T \dots \dots \dots (619)$$

уравненіе, выведенное нами въ § 275 слѣд.

§ 282. Геометрическое представленіе движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести. Пользуясь только интеграломъ живой силы (619):

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = T$$

и интеграломъ площадей (620):

$$A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2$$

можно дать полную картину движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, какъ это показали Poinsot и какъ это сейчасъ мы покажемъ.

Положимъ, что уравненіе центральнаго эллипсоида инерціи тѣла таково:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k \dots \dots \dots (646)$$

Пусть:

r — радиус-вектор эллипсоида инерции, направленный по мгновенной оси вращения;

p — длина перпендикуляра, опущенного из центра этого эллипсоида на касательную къ нему плоскость, касающуюся въ концѣ r .

x, y, z — координаты конца радиуса-вектора r .

Уравненіе мгновенной оси будетъ

$$\frac{x}{\omega_1} = \frac{y}{\omega_2} = \frac{z}{\omega_3} = \frac{r}{\omega} \dots \dots \dots (647)$$

Подставляя въ (46) величины x, y, z изъ (647) получимъ:

$$(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \frac{r^2}{\omega^2} = k \dots \dots \dots (648)$$

Отсюда, согласно съ (619):

$$\frac{\omega}{r} = \sqrt{\frac{T}{k}} \dots \dots \dots (649)$$

Уравненіе касательной плоскости въ точкѣ (x, y, z) будетъ:

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = k,$$

гдѣ ξ, η, ζ текущія координаты плоскости.

Уравненіе перпендикуляра p будетъ, слѣдовательно:

$$\frac{\xi}{A\omega_1} = \frac{\eta}{B\omega_2} = \frac{\zeta}{C\omega_3} \dots \dots \dots (650)$$

Согласно съ (645) уравненіе (650) есть уравненіе перпендикуляра, возставленнаго изъ центра тяжести къ неизмѣняемой плоскости. Этотъ перпендикуляръ, слѣдовательно, неподвиженъ.

Изъ аналитической геометрии извѣстно, что длина перпендикуляра p опредѣляется уравненіемъ:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)}{k^2} \dots \dots \dots (651)$$

Отсюда, согласно съ (620), (647) и (649):

$$p^2 = k \frac{T}{G^2} \dots \dots \dots (652)$$

Итакъ: перпендикуляръ p неподвиженъ, длина его постоянна и онъ перпендикуляренъ къ неизмѣняемой плоскости и къ касательной плоскости, проведенной въ концѣ мгновенной оси r (фиг. 102), такъ что эта касательная плоскость параллельна неизмѣняемой плоскости, и потому тоже неподвижна.

Слѣдовательно: движеніе происходитъ такъ, что эллипсоидъ инерціи тѣла постоянно касается неподвижной касательной плоскости, вра-

шансь около своего неподвижнаго центра, и мгновенною осью служитъ радиусъ-векторъ r проведенный въ точку касанія.

Изъ (649) имѣемъ:

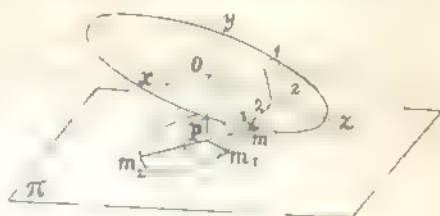
$$\omega = r \sqrt{\frac{T}{k}} \dots \dots \dots (653)$$

Слѣдовательно: вращательная скорость ω около мгновенной оси r пропорціональна радиусу-вектору r эллипсоида инерции.

Согласно съ § 280-мъ неподвижная касательная плоскость перпендикулярна къ моменту G импульсивной пары, сообщившей тѣлу движеніе.

Точка прикосновенія касательной плоскости, представляющая собою конецъ радіуса-вектора, направленаго по мгновенной оси, называется полюсомъ.

Кривая, описываемая полюсомъ на эллипсоидѣ инерціи, называется полюдію (фиг. 102).



Фиг. 102.

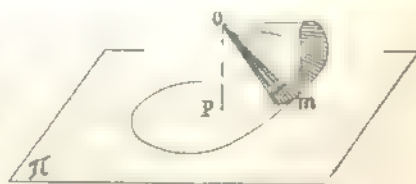
Кривая, описываемая полюсомъ на неподвижной плоскости, называется герполодію (фиг. 102).

§ 283. Аксоиды въ движеніи тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести. Соединивъ прямыми всѣ точки полюди съ центромъ тяжести, который, согласно нашему предположенію, неподвиженъ, получимъ конусъ, описываемый въ тѣхъ мгновенныхъ осяхъ r .

Соединивъ прямыми всѣ точки герполоди съ центромъ тяжести, получимъ неподвижный конусъ, описываемый мгновенною осью r въ пространстве.

Конусъ, опирающийся на полюдію, называется подвижнымъ аксоидомъ. Конусъ, опирающийся на герполодію, называется неподвижнымъ аксоидомъ.

Въ каждый данный моментъ тѣло вращается на бесконечно-малый уголъ около мгновенной оси, и потому въ теченіи бесконечно-малаго времени dt мгновенная ось, по которой аксоиды касаются одинъ съ другимъ, остается неподвизною. Слѣдовательно въ время движенія тѣла, неизмѣняемо



Фиг. 103.

соединенный съ нимъ подвижной аксоидъ катится по неподвижному аксоиду. Тѣмъ полюдію катится по герполоди, такъ что дуги, проходимыя полюдію по полюди и по герполоди одновременно, равны между собою.

Если ограничимъ подвижный конусъ полюдію, какъ это изображено на фиг. 103, то движеніе можетъ быть представлено еще тѣмъ, что подвижный аксоидъ, имѣющій вершину въ неподвижномъ центрѣ тя-

жести, катится своимъ краемъ (полодію) по герполодіи, лежащей въ неподвижной плоскости касательной къ эллипсоиду инерціи.

§ 284. Полодія. Изъ (651) слѣдуетъ:

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{k^2}{p^2} \dots \dots \dots (654)$$

Этому уравненію и уравненію эллипсоида инерціи

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k \dots \dots \dots (655)$$

должны удовлетворять координаты (x, y, z) , которыя мы приняты за координаты полюса. Слѣдовательно (654) и (655) суть уравненія положія, которая представляетъ собою, поэтому, пересѣченіе эллипсоида инерціи (655) съ поверхностью 2-го порядка (654).

Помножимъ (655) на $\frac{k}{p^2}$ и вычтемъ изъ (654). Получимъ:

$$A \left(A - \frac{k}{p^2} \right) x^2 + B \left(B - \frac{k}{p^2} \right) y^2 + C \left(C - \frac{k}{p^2} \right) z^2 = 0 \dots (656)$$

Это уравненіе однородное 2-го порядка есть уравненіе конуса 2-го порядка. Какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, кривая, представляемая системою (654) и (655), представляется также системою (655) и уравненія (656), выводимаго изъ (654) и (655). Итакъ: положія представляютъ собою пересѣченіе эллипсоида инерціи (655) съ конусомъ 2-го порядка (656).

Для того, чтобы конусъ (656) не былъ мнимымъ, необходимо соблюденіе условія:

$$A \geq \frac{k}{p^2} - C$$

которое равносильно такому условію:

$$\sqrt{\frac{k}{C}} \geq p > \sqrt{\frac{k}{A}}$$

которое очевидно, потому что с. стоитъ въ томъ, что разстояніе p касательной плоскости отъ центра эллипсоида было бы не больше его большой полуоси $\sqrt{\frac{k}{C}}$ и не меньше его меньшей полуоси $\sqrt{\frac{k}{A}}$.

Если $\frac{k}{p^2} = A$ или $\frac{k}{p^2} = C$, то конусъ вырождается въ двѣ мнимыя плоскости, пересѣкающіяся по дѣйствительной прямой, совпадающей съ осью x или съ осью z . Въ этомъ случаѣ положія превращаются или въ точки e, e' , лежащія въ концахъ большой оси или въ точки a, a' , лежащія въ концѣ малой оси (фиг. 104).

Если $\frac{k}{p^2} = B$, то конусъ вырождается въ пару плоскостей, опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$x = \pm s \sqrt{\frac{C(B-C)}{A(A-B)}} \dots \dots \dots (657)$$

и проходящихъ чрезъ среднюю ось. Въ этомъ случаѣ пологія состоятъ изъ эллипсовъ e и e' (фиг. 104).

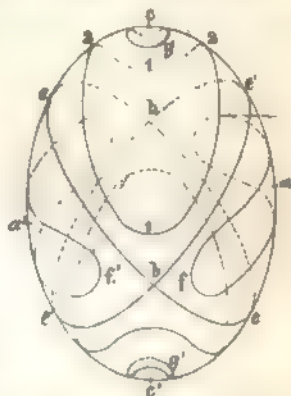
Такъ какъ ковусъ (656) имѣетъ тѣ же плоскости симметріи, какъ и эллипсоидъ, то каждая изъ остальныхъ пологій состоятъ изъ двухъ замкнутыхъ вѣтвей, симметрично расположенныхъ относительно діаметральныхъ плоскостей эллипсоида. Каждая такая вѣтвь имѣетъ *четыре* вершины 1, 2, 1,2 (фиг. 104), для которыхъ радиусъ векторъ принимаетъ минимальныя и максимальныя значенія. Въ теченіи движенія тѣла одна изъ вѣтвей пологій катится по касательной плоскости, и се именно мы и разсматриваемъ.

Другая вѣтвь катится по другой касательной плоскости параллельной къ первой.

Мы полагаемъ, что $A > B > C$ и, соответственно этому, большая ось эллипсоида совпадаетъ съ осью z , средняя съ осью y , малая съ осью x . Обозначимъ вершины эллипсоида чрезъ a, a', b, b', c, c' . Сообразно съ тѣмъ, какъ направленъ моментъ G импульсивной пары, сообщившей тѣлу движеніе, и какъ великъ этотъ моментъ, получаемъ въ (652) и различныя величины для p и для p^k .

Если $p^k = A$, то ковусъ (656) вырождается въ ось z , и пологія превращаются въ вершину a или a' . Если p^k немного меньше A , то пологія состоятъ изъ небольшой замкнутой кривой f , окружающей a , и изъ симметричной ей кривой f' , окружающей a' . Съ уменьшеніемъ p^k эти кривыя удаляются отъ a и a' . При $p^k = B$ пологія представляютъ собою два эллипса e и e' . Точно такъ же при $p^k = C$ пологія состоятъ изъ точекъ c и c' ; съ увеличеніемъ p^k она обращается въ двѣ кривыя окружающія c и c' ; съ дальнѣйшимъ увеличеніемъ p^k эти кривыя удаляются отъ c и c' . Наконецъ при $p^k = B$ получаютъ прежніе эллипсы e и e' . Вотъ какъ расположены различныя пологія на эллипсоидѣ инерціи даннаго тѣла. Но для даннаго движенія служитъ только одна изъ этихъ пологій, и на одну изъ неподвижныхъ касательныхъ плоскостей она опирается одною только вѣтвью.

Чрезъ каждую точку поверхности эллипсоида инерціи проходятъ одна или нѣсколько пологій. Изъ всѣхъ этихъ пологій опредѣляетъ данное движеніе та, которая проходитъ чрезъ точку m_0 , въ которой эллипсоидъ инерціи пересѣкался мгновенною осью въ началѣ движенія. Эта пологія катится въ теченіи движенія на ту касательную плоскость, которая касалась съ эллипсоидомъ инерціи въ точкѣ m_0 въ началѣ движенія.

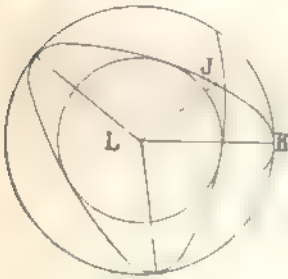


Фиг. 104.

§ 285. Герполодія. Радіусъ - векторъ ρ герполодіи, проведенный изъ основанія P перпендикуляра, опущеннаго изъ центра тяжести на неподвижную плоскость, служить катетомъ въ треугольникѣ, другой катетъ котораго r и гипотенуза γ . Поэтому

$$\rho = \sqrt{\gamma^2 - r^2} \dots \dots \dots (658)$$

Изъ теории пологія мы видѣли, что γ измѣняется между своими минимальными и максимальными значениями, соответствующими вершинамъ эллипсоида. Слѣдовательно радіусъ-векторъ ρ герполодіи имѣетъ максимумъ и минимумъ ρ_1 и ρ_2 . Поэтому герполодія заключается между концентрическими окружностями, описанными радиусами ρ_1 и ρ_2 изъ точки P (фиг. 105), и послѣдовательно касается этихъ окружностей.



Фиг. 105

При этомъ, какъ это показали Hess и Sparre (Comptes rendus, 1864), герполодія не имѣетъ точекъ перегиба и обращена вогнутостью къ основанію P перпендикуляра.

Дуга m_1, m_2 герполодіи отъ точки соприкосновенія съ внутреннею окружностью до точки соприкосновенія съ вѣншею окружностью проходитъ полюсомъ въ то время, какъ на пологіи онъ проходитъ дугу отъ одной ея вершины до слѣдующей, и потому равна $\frac{1}{4}$ всей пологіи. Поэтому, когда полюсъ пройдетъ на эллипсоидѣ всю пологію, онъ пройдетъ на герполодіи дугу, на которую опирается уголъ 4 (m_1, Pm_2). Если этотъ уголъ несоизмѣримъ съ π , то герполодія не замкнутая кривая. Если же этотъ уголъ соизмѣримъ съ π , то герполодія замкнута.

Если $\frac{k}{p^1} = A$ или $\frac{k}{p^2} = C$, то пологія представляетъ собою точку (вершину одной изъ осей эллипсоида) и герполодія представляетъ собою тоже точку, и тѣло вращается около оси, проходящей чрезъ эту точку.

Если $\frac{k}{p^1} = B$, то пологія, какъ мы видѣли, представляетъ собою эллипсъ, малая ось котораго равна $\sqrt{\frac{k}{B}}$. Движеніе происходитъ такъ, что этотъ эллипсъ опирается на неподвижную касательную плоскость, постоянно уменьшается, герполодія обращается въ спираль ассимптотически приближающуюся къ P , или γ увеличивается до соприкосновенія герполодіи съ вѣншею окружностью и потомъ уменьшается, приближаясь ассимптотически къ P ; вся герполодія представляется кривою, состоящею изъ двухъ симметрично расположенныхъ спиралей.

Если эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія, то и пологія и герполодія суть окружности.

Если эллипсоидъ инерціи есть сфера, то пологія и герполодія суть точки.

§ 286. Устойчивость движенія около главных осей. Если первоначальный импульсъ направленъ такъ, что тѣло начинаетъ вращаться около оси, составляющей весьма малый уголъ съ большою или съ малою осью эллипсоида инерціи, то пологія, какъ мы видѣли, представится маленькою замкнутою кривою, окружающею конецъ большой или малой оси. Слѣдовательно: если начальное вращеніе происходило около *большой* или *малой* оси, то такое движеніе *устойчиво*, такъ какъ, при малыхъ отклоненіяхъ оси вращенія, не произойдетъ большаго измѣненія въ движеніи.

Если же первоначальное движеніе происходило около оси, составляющей весьма малый уголъ со среднею осью эллипсоида инерціи, то пологія будетъ большая замкнутая кривая, окружающая конецъ большой или малой оси; полюсъ, идя по этой кривой, уходитъ отъ своего первоначальнаго положенія на конечное разстояніе, и движеніе значительно измѣняетъ свой первоначальный характеръ. Поэтому, если начальное вращеніе происходило около *средней* оси, то движеніе *неустойчиво*, такъ какъ, при малѣйшемъ отклоненіи оси вращенія отъ своего первоначальнаго положенія, она будетъ отклоняться отъ него все болѣе и болѣе.

§ 287. Независимость вращательнаго движенія около центра тяжести.

Перейдемъ къ какому угодно движенію свободнаго абсолютно твердаго тѣла, не имѣющаго ни одной неподвижной точки и подверженнаго дѣйствію какихъ угодно силъ.

Свободное тѣло способно вращаться около любой оси. Поэтому къ нему приложимо начало площадей, которое, по отношенію къ оси z , выражается уравненіемъ:

$$\Sigma m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \Sigma m (x Y - y X)$$

Обозначая чрезъ x, y, z , координаты центра тяжести и полагая

$$x = \bar{x} + x'$$

$$y = \bar{y} + y'$$

$$z = \bar{z} + z'$$

получимъ:

$$\Sigma m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) + \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \Sigma m = \Sigma m (x Y - y X)$$

такъ какъ лѣвая часть измѣнится отъ перенесенія начала координатъ

Первоначальное положеніе начала координатъ произвольно, и мы можемъ его выбрать такъ, чтобы оно въ данный моментъ совпадало съ центромъ тяжести. Тогда $x = 0$; $y = 0$, и получимъ:

$$\Sigma m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) = \Sigma m (x Y - y X).$$

Такия же уравненія получимъ для моментовъ паръ направленныхъ по осямъ x и y . Эти уравненія совершенно такія, какія бы мы получили, если бы центръ тяжести былъ неподвиженъ въ началѣ координатъ. Но именно ими и опредѣляется вращеніе около центра тяжести.

Итакъ: *подъ вліяніемъ какихъ бы то ни было силъ вращеніе около центра тяжести происходитъ такъ, какъ будто бы онъ былъ неподвиженъ.*

Вотъ почему содержащееся въ предшествующихъ параграфахъ изслѣдованіе движенія около центра тяжести имѣетъ особенно важное значеніе оно особенно важно вслѣдствіе слѣдующихъ соображеній. Согласно началу; сохранения движенія центра тяжести онъ движется такъ, какъ будто бы масса всего тѣла была сосредоточена въ немъ—какъ будто бы всѣ силы были приложены къ нему именно. Поэтому движеніе свободного твердаго тѣла можно изслѣдовать такъ: опредѣлить движеніе центра тяжести, какъ будто масса тѣла была въ немъ сосредоточена и всѣ дѣйствующія силы перенесены параллельно самимъ себѣ такъ, что точка ихъ приложенія находится въ центрѣ тяжести. Затѣмъ останется разсмотрѣть движеніе тѣла, уже свободного отъ дѣйствія силъ, около центра тяжести какъ около неподвижнаго и сложить оба эти движенія. Движеніе же около центра тяжести безъ вліянія вѣшнихъ силъ именно таково, какъ движеніе тяжелаго тѣла около центра тяжести, такъ какъ дѣйствіе тяжести въ этомъ случаѣ уничтожается противодѣйствіемъ точки опоры.

§ 288. Движеніе тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, помѣщенной не въ центрѣ тяжести. Итакъ, изслѣдованіе движенія тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около центра тяжести, изложенное въ §§ 275—286, представляетъ общій интересъ какъ главная часть изслѣдованія какого бы то ни было движенія свободного твердаго тѣла.

Но и движеніе тяжелаго абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки, несовпадающей съ центромъ тяжести весьма интересно, потому что таково движеніе конического маятника, жирессоновъ и волчковъ, а также въ особенности потому, что аналитическая механика въ своемъ постепенномъ развитіи сталкивается съ необходимостью рѣшить эту задачу, представляющую собою интегрированіе дифференціальныхъ уравненій (617) въ томъ случаѣ, когда правыя ихъ части не равны нулю. Это интегрированіе въ настоящее время исполнено только въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ.

1) *Случай Poincaré* движеніе около центра тяжести, изслѣдованное въ §§ 275—286. Въ этомъ случаѣ правыя части уравненій (617) равны нулю и (617) принимаютъ видъ (618). Этотъ случай особенно важенъ, какъ основаніе изслѣдованія какого-бы то ни было движенія свободного твердаго тѣла (планетъ, артиллерійскихъ снарядовъ, коническихъ пуль и пр.).

Случай Lagrange'a. Неподвижная точка находится на оси эллипсоида инерціи, который, для неподвижной точки, есть эллипсоидъ враще-

нія. Лагранжъ далъ полное аналитическое рѣшеніе этой задачи. Якоби далъ геометрическое представленіе, заключающееся въ слѣдующемъ:

Теорема Якоби. *Въ случаѣ Лагранжа тѣло движется по законамъ случая Пуансо въ другомъ воображаемомъ тѣлѣ, которое само движется по законамъ случая Пуансо.*

3) *Случай Ковалевской.* Наша соотечественница С. В. Ковалевская дала аналитическое рѣшеніе того случая, когда эллипсоидъ инерціи для точки опоры есть эллипсоидъ вращения, такъ что $A = B = 2C$ и центръ тяжести лежитъ въ экваторіальной плоскости этого эллипсоида ¹⁾. За свой мемуаръ Ковалевская получила большую премию Парижской Академіи Наукъ. Главная заслуга этого мемуара заключается въ томъ, что Ковалевская нашла, кромѣ извѣстныхъ интеграловъ площадей и живой силы, еще третій алгебраическій интегралъ. Авторъ настоящаго курса ²⁾ показалъ, что этотъ интегралъ, въ частномъ случаѣ, распадается на два интеграла, такъ что всего получается 4 алгебраическихъ интеграла достаточныхъ для опредѣленія обоихъ аксидовъ. Проф. Г. Г. Анпельротъ показалъ ³⁾, что въ этомъ случаѣ нѣкоторая прямая равномерно вращается около неподвижной точки въ нѣкоторой плоскости.

Проф. Б. К. Млодзевскій ⁴⁾ показалъ, что въ нѣкоторомъ еще болѣе частномъ случаѣ $\omega_1, \omega_2, \omega$, выражаются алгебраически чрезъ время t , такъ что, съ математической точки зрѣнія, движеніе въ случаѣ проф. Млодзевскаго проще движенія математическаго маятника (опредѣляемаго эллиптическими функциями). Проф. Н. Е. Жуковский ⁵⁾ нашелъ геометрическое значеніе постояннаго k въ случаѣ Ковалевской. Такимъ образомъ работа С. В. Ковалевской получила широкое развитіе въ трудахъ русскихъ ученыхъ.

4) *Случай Hess'a.* Гессъ ⁶⁾ нашелъ также третій интегралъ въ томъ

¹⁾ S. Kowalewski, «Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe». Acta Mathematica, XII, 1889.

²⁾ Н. Б. Делоне «Къ вопросу о геометрическомъ истолкованіи интеграловъ движенія твердаго тѣла около неподвижной точки, данныхъ С. В. Ковалевскою». Матем. Сборн. XIV.

«Алгебраическіе интегралы движенія тяжелаго твердаго тѣла» Спб 1892

Г. Г. Анпельротъ: «Нѣкоторые дополненія къ сочиненію Н. Б. Делоне». Труды Отд. Физ. Наук. Общ. Любит. Естествозн. VI

«Задача о движеніи тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки» Москва, 1893.

Б. К. Млодзевскій. «Объ одномъ случаѣ движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки». Матем. Сборн. XVIII.

Н. Е. Жуковский. «Геометрическая интерпретація разсмотрѣннаго С. В. Ковалевскою случая движенія тяжелаго твердаго тѣла около неподвижной точки». Матем. Сборн. XXI.

⁶⁾ Hess. Mathematische Annalen. t. 37.

случаѣ, когда

$$\mu_0 = 0: A(B - C)x_0^2 - C(A - B)z_0^2; A > B > C$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 координаты центра тяжести относительно главныхъ осей инерціи точки подвѣса; A, B, C моменты инерціи относительно этихъ осей. Этотъ случай былъ изслѣдованъ съ необыкновенною полнотою оцѣнки русскими математиками ¹⁾, при чемъ Б. К. Млодзѣевскій и П. А. Некрасовъ показали, что въ этомъ случаѣ задача приводится не къ однозначнымъ, а къ *многозначнымъ* функциямъ времени. Н. Е. Жуковский показалъ, что движеніе тѣла въ этомъ случаѣ управляется движеніемъ сферическаго маятника и нѣкоторымъ локсодромическимъ движеніемъ.

Теорія движенія твердаго тѣла около неподвижной точки необыкновенно ясно и красиво изложена въ книгѣ Клейна (Theorie des Kreisels. von Klein und Sommerfeld), въ которой авторы попутно знакомятъ читателя съ общою теоріею функцій и съ теоріею эллиптическихъ функцій.

§ 289. Аналитическое изслѣдованіе движенія абсолютно твердаго тѣла около неподвижной точки. Теперь познакомимся съ формулами движенія абсолютно твердаго тѣла, употребляемыми въ большинствѣ сочиненій по механикѣ. Знакомство съ ними необходимо во-первыхъ потому, что это формулы классическія, и во-вторыхъ потому, что онѣ намъ понадобятся впоследствии.

Изберемъ подвижную систему осей координатъ $O\xi, O\eta, O\zeta$, неизмѣяемо соединенную съ тѣломъ, и неподвижную систему осей координатъ Ox, Oy, Oz , имѣющую начало тоже въ неподвижной точкѣ. Имѣемъ формулы преобразованія координатъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= a\xi + b\eta + c\zeta \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (659)$$

гдѣ $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ суть косинусы угловъ, составляемыхъ подвижными осями координатъ съ неподвижными. Между этими косинусами, какъ извѣстно изъ аналитической геометріи, существуютъ соотношенія:

$$\left. \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (660)$$

¹⁾ П. А. Некрасовъ. Матем. Сборн. XVI, XVIII.

Б. К. Млодзевскій и П. А. Некрасовъ «Объ условіяхъ существованія асимптотическихъ періодическихъ движеній въ задачѣ Гесса». (Труд. Отд. Физ. Наук. Общ. Люб. Еств.) VI, 1893.

Н. Г. Жуковский. «Локсодромический маятникъ Гесса». (Труд. Отд. Физ. Наук. Общ. Люб. Еств.), V, 1893.

$$\left. \begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a + b''b + c''c &= 0 \\ aa' + bb' + cc' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (661)$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1 \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1 \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (662)$$

$$\left. \begin{aligned} bc + b'c' + b''c'' &= 0 \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0 \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (663)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= b'c'' - c'b''; & a' &= b''c - c''b; & a'' &= bc' - c'b \\ b &= ca'' - a'c; & b' &= c'a - a'c; & b'' &= ca' - b'c \\ c &= a'b'' - a''b'; & c' &= a''b - b'a; & c'' &= ab' - b'a \end{aligned} \right\} \dots \dots (664)$$

Продифференцируемъ по t уравненія (659), принимая во вниманіе, что ξ, η, ζ какъ координаты точки твердаго тѣла относительно осей неизмѣняемо соединенныхъ съ тѣломъ, не измѣняются. Получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \xi \frac{da'}{dt} + \eta \frac{db'}{dt} + \zeta \frac{dc'}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \xi \frac{da''}{dt} + \eta \frac{db''}{dt} + \zeta \frac{dc''}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (665)$$

Производныя, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій суть проецированія скорости точки m на неподвижныя оси. Обозначая чрезъ u, v, w проецированія этой скорости на оси подвижныя, получимъ по правиламъ аналитической геометріи:

$$\left. \begin{aligned} u &= a \frac{dx}{dt} + a' \frac{dy}{dt} + a'' \frac{dz}{dt} \\ v &= b \frac{dx}{dt} + b' \frac{dy}{dt} + b'' \frac{dz}{dt} \\ w &= c \frac{dx}{dt} + c' \frac{dy}{dt} + c'' \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (666)$$

Дифференцируя 1-ое изъ уравненій (663), получимъ.

$$cd\dot{b} + c\dot{d}b + c\dot{d}b = = (Ldc + bdc' + bdc'').$$

Называя чрез pdt каждую изъ величинъ, стоящую въ одной части этого уравненія и называя pdt и rdt части такихъ же уравненій получаемыхъ изъ остальныхъ двухъ уравненій (663) получимъ:

$$\left. \begin{aligned} pdt &= cdb + cdb + cdb - (bdc + bdc' + bdc'') \\ qdt &= adc + a'dc' + a''cd - (cda + cda' + c''da'') \\ rdt &= bda + bda + b'da - (adb + a'b' + a'db'') \end{aligned} \right\} \quad (667)$$

Дифференцируя (662), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} ada + a'da' + a''da'' &= 0 \\ bdb + b'db' + b''db'' &= 0 \\ cdc + c'dc' + c''dc'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (668)$$

Помноживъ 1-ое изъ уравненій (665) на a , 2-ое на a' , 3-е на a'' сложивъ и сообразуясь съ (667) и (668), получимъ:

$$u = q\zeta - r\eta \quad \dots \dots \dots (669)$$

Такимъ же образомъ найдемъ два другія подобныя же уравненія, получаемыя также изъ (669) циклическою перестановкою. Всего получимъ три уравненія:

$$\left. \begin{aligned} u &= q\zeta - r\eta \\ v &= r\xi - p\zeta \\ u' &= p\eta - q\xi \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (670)$$

Найдемъ теперь точки, не имѣющія скорости въ моментъ t , для которыхъ, следовательно: $u = 0$; $v = 0$; $u' = 0$. Для такихъ точекъ уравненія (670) дадутъ:

$$\left. \begin{aligned} q\zeta - r\eta &= 0 \\ r\xi - p\zeta &= 0 \\ p\eta - q\xi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (671)$$

Отсюда:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} \quad \dots \dots \dots (672)$$

Эти уравненія (672) показываютъ, что точки, неимѣющія скорости въ моментъ t , расположены на прямой, выражаемой этими уравненіями (672). Эта прямая и есть то, что мы называли мгновенно осью. Полагая $p^2 + q^2 + r^2 = n^2$ видимъ, что мгновенная ось составляетъ съ осями

координатъ углы, косинусы которыхъ равны

$$\frac{p}{n}; \frac{q}{n}; \frac{r}{n}.$$

Скорость V точки m получимъ изъ:

$$\begin{aligned} V^2 &= u^2 + v^2 + w^2 = (q\zeta - r\eta)^2 + (r\xi - p\zeta)^2 + (p\eta - q\xi)^2 \\ &= (p^2 + q^2 + r^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (p\xi + q\eta + r\zeta)^2. \end{aligned}$$

Если расстояние точки m отъ O обозначимъ чрезъ R , то.

$$\begin{aligned} V^2 &= n^2 R^2 - n^2 R^2 \left(\frac{p\xi}{nR} + \frac{q\eta}{nR} + \frac{r\zeta}{nR} \right)^2 \\ &= n^2 R^2 [1 - \cos^2 (R, n)] \\ &= n^2 R^2 \sin^2 (R, n). \end{aligned}$$

Отсюда

$$V = nR \sin (R, n).$$

Но $R \sin (R, n)$ есть расстояние δ точки отъ мгновенной оси. Следовательно

$$V = \delta n.$$

Но если ω есть угловая скорость около мгновенной оси, то:

$$V = \delta \omega.$$

Итакъ $n = \omega$. Поэтому p, q, r суть тѣ самыя проложенія угловой скорости ω на оси ξ, η, ζ , которыя мы обозначили чрезъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ихъ иначе называютъ вращеніями около осей ξ, η и ζ .

Используя формулы этого параграфа, можно было бы изложить всю теорію вращенія тѣла около неподвижной точки, которую мы вывели, пользуясь приемами английскихъ математиковъ.

§ 290. Эйлеровы независимые углы. Формулы предыдущаго параграфа очень симметричны, но содержащіяся въ нихъ 9 косинусовъ $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta, \gamma$ связаны между собою равенствами (660)–(664).

Эйлеръ показалъ, что достаточно трехъ угловъ для полного опредѣленія положенія подвижной системы осей координатъ, имѣющихъ общее начало съ неподвижными осями координатъ. Эти углы суть слѣдующіе (фиг. 106):

ϑ —составляемый осями x и ζ ;

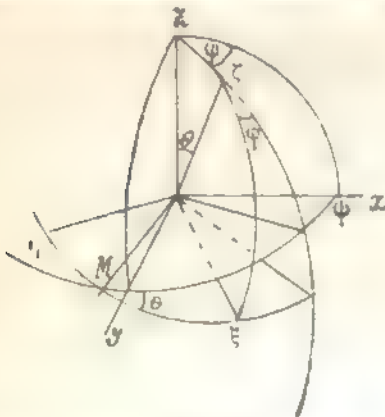
φ —составляемый плоскостью (x, ζ) съ плоскостью (ζ, ξ) ,

ψ —составляемый плоскостью (x, ζ) съ плоскостью (x, y) .

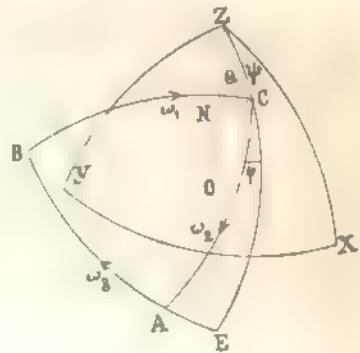
Представимъ себѣ, для поясненія, что сфера описанная около O раздѣлена на восемь равныхъ единицъ, пересѣкается подвижными осями ξ, η, ζ соотвѣтственно въ точкахъ A, B, C (фиг. 107), а неподвижныя оси x, y, z соотвѣтственно въ точкахъ X, Y, Z .

Если подвижныя оси совпадали прежде съ неподвижными, то мы, пользуясь только поворотами на углы ψ , θ , φ , можем привести подвижную систему въ настоящее ея положеніе (фиг. 106); для этого: 1) отодвинемъ плоскость (ζ , ξ) на уголъ ψ отъ плоскости (z , x) вращеніемъ подвижной системы около совпадающихъ осей ζ и z ; 2) отодвинемъ, затѣмъ, ось ζ отъ оси z на уголъ θ вращеніемъ около оси η , и 3) отодвинемъ плоскость (ζ , ξ) отъ плоскости (z , ζ) на уголъ φ вращеніемъ около оси ζ на уголъ φ .

Условившись въ направленіи этихъ вращеній, получимъ вполне определенное положеніе подвижныхъ осей, совпадающее съ даннымъ. Слѣдо-



Фиг. 107.



Фиг. 106.

вательно достаточно трехъ Эйлеровыхъ угловъ для определенія положенія подвижныхъ осей. Эйлеровы углы независимы между собою; въ этомъ заключается большое ихъ преимущество, но недостатокъ ихъ въ томъ, что они даютъ менѣ симметричныя формулы.

Найдемъ теперь соотношенія между ω_1 , ω_2 , ω_3 и θ , φ , ψ .

Опустимъ перпендикуляръ CN изъ C на OZ .

Слагающія скорости точки C перпендикулярная къ плоскости COZ равна $CN \frac{d\psi}{dt}$ или, что то же, $\sin \theta \cdot \frac{d\psi}{dt}$.

Слагающія скорости точки C по ZC равна $\frac{d\theta}{dt}$.

Но движеніе точки C опредѣляется также вращеніями ω_1 и ω_2 .

Поэтому взаимно перпендикулярныя скорости $\frac{d\theta}{dt}$ и $\sin \theta \frac{d\psi}{dt}$ изображаютъ ту же скорость точки C , какъ и взаимно перпендикулярная скорости ω_1 и ω_2 . Слѣдовательно между этими и другими скоростями существуютъ такія же соотношенія, какъ между двумя системами плоскихъ координатъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi \\ \sin \theta \frac{d\psi}{dt} &= -\omega_1 \cos \varphi + \omega_2 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (673)$$

и наоборотъ:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin \varphi - \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ \omega_2 &= \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin \theta \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (674)$$

Опустивъ перпендикуляръ на OZ изъ точки пересѣченія E плоскостей (z, ζ) и (ξ, η) видимъ, что слагающая скорости точки E перпендикулярная къ ZE равна $\frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin (Z, E)$ или, что то же $\frac{d\varphi}{dt} \cos \theta$.

Скорость точки A относительно E по EA равна $\frac{d\varphi}{dt} \cdot \sin (C, A)$ или, что то же $\frac{d\varphi}{dt}$. Полная скорость точки A по AB равна, поэтому

$$\frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Но она равна также ω_2 . Поэтому

$$\omega_2 = \frac{d\psi}{dt} \cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} \dots \dots \dots (675)$$

Уравненія (674) и (675) представляютъ собою зависимость между эйлеровыми углами θ, φ, ψ , определяющими положеніе тѣла въ пространствѣ и угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ около подвижныхъ осей.

Скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ находятся путемъ указаннымъ въ §§ 274 и 275, то-есть интегрированіемъ уравненій (617). Положеніе тѣла въ данный моментъ находится затѣмъ интегрированіемъ уравненій (674) и (675) и опредѣленіемъ изъ нихъ эйлеровыхъ угловъ по полученнымъ $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и по начальнымъ даннымъ.

Зная же эйлеровы углы, можно или непосредственно по нимъ представить себѣ положеніе твердаго тѣла, неизмѣнимо соединеннаго съ подвижными осями, или, если это нужно, опредѣлить по θ, φ, ψ косинусы $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ по формуламъ, приводимымъ въ аналитической геометріи. Эти формулы выводятся по извѣстной формулѣ сферической тригонометріи

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A \dots \dots \dots (676)$$

гдѣ α, β, γ —суть стороны сферическаго треугольника; A, B, C —противулежащіе углы.

Продолжимъ дугу (x, y) (фиг. 106) до пересѣченія M съ плоскостью (ξ, η) . Тогда уголъ

$$xM\xi = \theta; My = \psi; Mx = 90^\circ + \psi; M\xi = 90^\circ - \varphi.$$

Прилагая формулу (676) къ сферическому треугольнику $xM\xi$, получимъ:

$$a = \cos (x, \xi) = -\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta.$$

Прилагая (676) къ другимъ сферическимъ треугольникамъ, получимъ:

$$\begin{aligned}
 a &= -\sin \psi \cdot \sin \varphi + \cos \psi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \\
 a' &= \cos \psi \cdot \sin \varphi + \sin \psi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta \\
 a'' &= -\sin \theta \cdot \cos \varphi \\
 b &= -\sin \psi \cdot \cos \varphi - \cos \psi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\
 b' &= \cos \psi \cdot \cos \varphi - \sin \psi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\
 b'' &= \sin \theta \cdot \sin \varphi \\
 c &= \sin \theta \cdot \cos \psi \\
 c' &= \sin \theta \cdot \sin \psi \\
 c'' &= \cos \theta
 \end{aligned}
 \tag{677}$$

ОТДѢЛЪ V.

Относительное движеніе.

ГЛАВА I.

Относительное движеніе точки.

§ 291. Движеніе точки по линіи, которая сама движется. Представимъ себѣ, что точка m движется по кривой MN''' такъ, что въ послѣдовательные безконечно близкіе моменты оказывается въ M, N, N', N'', N''' . Положимъ (фиг. 108), что въ то же самое время кривая MN''' сама движется такъ, что въ моменты, упомянутые выше, принимаетъ положенія I, II, III, IV. Такое двойное движеніе заставляеть точку находиться послѣдовательно въ положеніяхъ M, m, m', m'', m''' .

Движеніе точки m по кривой MN''' называется *относительнымъ*.

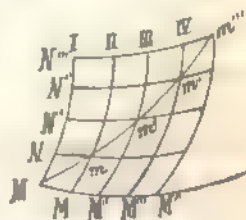
Движеніе самой кривой MN''' называется *уносящимъ*.

Истинное движеніе точки чрезъ положенія M, m, m', m'', m''' называется *абсолютнымъ*.

Муха, летящая въ вагонѣ движущагося поѣзда, совершаетъ, относительно вагона движеніе (относительное). Движеніе вагона есть движеніе *уносящее*. Вслѣдствіе совокупности этихъ двухъ движеній муха совершаетъ, относительно мѣстности, по которой вагонъ ѣдетъ, *абсолютное* движеніе.

Лодка переправляющаяся чрезъ рѣку, совершаетъ движеніе *относительное* по водѣ, *уносящее* движеніе которой, слагаясь съ относительнымъ движеніемъ лодки, заставляеть лодку выполнить *абсолютное* движеніе по отношенію къ берегамъ.

Можно сказать, что мы наблюдаемъ только относительныя движенія, и тому что самая земля совершаетъ весьма сложное движеніе обращаясь къ солнцу, вращаясь около оси и участвуя въ общемъ полетѣ солнечной системы среди звѣздныхъ мировъ. Поэтому изслѣдованіе относительнаго движенія чрезвычайно важно для пониманія наблюдаемыхъ явленій.



Фиг. 108

§ 292. Скорость въ относительномъ движеніи точки. Обозначивъ чрезъ dt безконечно-малый промежутокъ времени, въ теченіи котораго точка проходитъ по относительной траекторіи (подвижущейся кривой) элементъ MN (фиг. 108) и по абсолютной траекторіи элементъ Mm , замѣчаемъ, что въ предѣлѣ элементы MN , Mm и MM' можно разсматривать какъ линейныя, какъ элементы касательныхъ проведенныхъ въ M къ кривымъ MN''' и Mm''' и MM''' и что скорости;

v_r —относительнаго движенія,

v_u —уносящаго движенія и

v_a —абсолютнаго движенія;

выражаются какъ:

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \lim \frac{MN}{dt} \\ v_u &= \lim \frac{MM'}{dt} \\ v_a &= \lim \frac{Mn}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (578)$$

Слѣдовательно скорости v_r и v_u пропорціональны сторонамъ параллелограмма $MNmM'$, скорость же v_a пропорціональна его диагонали.

Поэтому: v_a есть геометрическая сумма скоростей v_r и v_u , то-есть

$$v_a = v_r + v_u$$

Здѣсь черточки обозначаютъ, что сумма берется геометрическая, а не алгебраическая.

Иначе говоря: абсолютная скорость точки выражается диагональю параллелограмма, построенною на скоростяхъ относительнаго и уносящаго движеній.

Не такъ просто опредѣляется ускореніе абсолютнаго движенія.

§ 293. Ускореніе абсолютнаго движенія. Теорема Кориолиса. Представимъ себѣ, что точка m проходитъ по относительной траекторіи MN (фиг. 109), въ теченіи безконечно-малаго промежутка времени dt , путь MN ; сама же относительная траекторія принимаетъ, въ концѣ этого промежутка времени, положеніе $M'N'$. Это перемѣщеніе относительной траекторіи можно разсматривать происшедшимъ отъ перенесенія ея въ параллельное положеніе $M'N'$ и отъ поворота изъ положенія $M'N'$ въ положеніе $M'N''$ около оси MO' .

Если бы на точку не дѣйствовали никакія силы, а она двигалась бы только подъ вліяніемъ скоростей v_r , v_u , v_a , то она прошла бы равномерно и прямолинейно пути:

$$\left. \begin{aligned} MD &= V_r \cdot dt \text{—въ относительномъ движеніи,} \\ MB &= V_u \cdot dt \text{—въ уносящемъ движеніи} \\ MA &= V_a \cdot dt \text{—въ абсолютномъ движеніи,} \end{aligned} \right\} \dots (680)$$

Подъ дѣйствіемъ же силъ точка пройдетъ другіе пути: ея скорости получатъ приращенія. Благодаря малости dt можно допустить, что въ теченіи dt силы не измѣняются ни по величинѣ, ни по направленію, вслѣдствіе чего движеніе происходитъ въ теченіи dt равномерно ускоренно, и, согласно (30), подъ вліяніемъ силъ точка m проходитъ еще пути:

$$DN = j_r \cdot \frac{(dt)^2}{2} \text{ въ относительномъ движеніи,}$$

$$AM' = j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2} \text{ въ уносящемъ движеніи,}$$

$$AN' = j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2} \text{ въ абсолютномъ движеніи,}$$

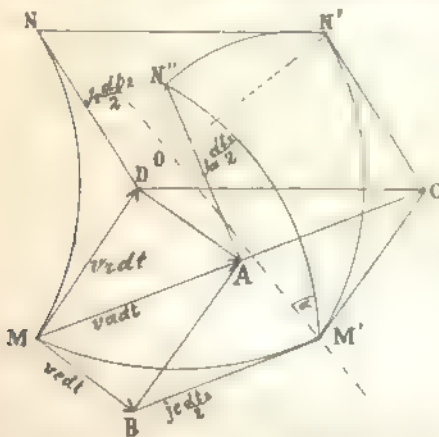
гдѣ j_r, j_a, j_a —суть ускоренія въ этихъ движеніяхъ.

Эти пути, сложясь съ путями (680), и приведутъ точку въ ея положенія N, M' и N'' .

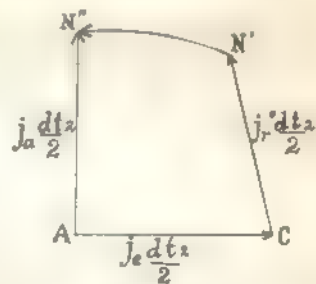
Соединимъ N съ N' прямою и построимъ параллелограммъ $DNN'C$. Фигура $M'CN'$, согласно построенію, равна фигурѣ MDN и всѣ соответствующія части этихъ фигуръ взаимно параллельны. Слѣдовательно AC и BM' , какъ прямыя, соединяющія концы равныхъ и взаимно-параллельныхъ прямыхъ $M'C$ и BA ,

равны и взаимно параллельны такъ что:

$$AC = BM' = j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2}.$$



Фиг. 109.



Фиг. 110.

Начертимъ, для ясности, отдѣльно (фиг. 110) фигуру $AN''N'C$. Здѣсь:

$$AN'' = j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2}$$

$$CN' = DN = j_r \cdot \frac{(dt)^2}{2}$$

$$AC = j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2}.$$

Опредѣлимъ сторону NN' . Если мы примемъ за направление этого вектора направление отъ N къ N'' , то, припоминая, что послѣдняя сторона многоугольника равна геометрической суммѣ остальныхъ сторонъ, считаемыхъ въ обратномъ направленіи, получимъ изъ фиг. 110.

$$j_a \frac{(dt)^2}{2} - j_e \frac{(dt)^2}{2} + j_r \frac{(dt)^2}{2} + \overline{N'N''} \dots \dots (681)$$

Обозначивъ чрезъ ω dt уголъ, на который $M'N'$ повертывается около оси OM' , чтобы придти въ положеніе $M'N''$ и опустимъ изъ N'' перпендикуляръ NO на ось OM (фиг. 109).

Тогда:

$$N'N'' = ON'' \cdot \omega \cdot dt \dots \dots \dots (682)$$

гдѣ ω есть скорость вращенія, приводящаго $M'N'$ до совпаденія съ $M'N''$

Обозначимъ чрезъ α уголъ наклоненія элемента $M'N''$ къ оси OM . Изъ треугольника $OM'N''$ имѣемъ:

$$ON'' = M'N'' \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (683)$$

Въ предѣлѣ $M'N''$ равно пути, пройденному точкою по относительной траекторіи равному $v_r dt$. Слѣдовательно (683) обращается въ

$$ON'' = v_r \cdot \sin \alpha \cdot dt$$

Подставивъ эту величину въ (682), найдемъ:

$$N'N'' = v_r \cdot \sin \alpha \cdot dt \cdot \omega \cdot dt = \omega \cdot v_r \cdot \sin \alpha \cdot (dt)^2.$$

Поэтому (681) приметъ видъ:

$$\overline{j_a \cdot \frac{(dt)^2}{2}} - \overline{j_e \cdot \frac{(dt)^2}{2}} + \overline{j_r \cdot \frac{(dt)^2}{2}} + \overline{\omega \cdot v_r \cdot \sin \alpha (dt)^2}$$

или:

$$\overline{j_a} = \overline{j_e} + \overline{j_r} + 2v_r \omega \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (684)$$

Это уравненіе и выражаетъ собою слѣдующую теорему Кориолиса: *ускореніи абсолютнаго движенія равно геометрической суммѣ трехъ ускореній: ускоренія j_e уносящаго движенія, ускоренія j_r относительнаго движенія и особаго ускоренія $2v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha$.*

Итакъ при относительномъ движеніи появляется особое ускореніе $2v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha$ равное удвоенному произведенію скоростей относительной v_r , вращательной ω и синуса угла α , составляемаго относительно скоростью съ осью вращенія относительной траекторіи.

Изъ чертежа (фиг. 109) замѣчаемъ слѣдующее:

ускореніе $2v_r \cdot \omega \sin \alpha$ перпендикулярно къ относительной скорости v_r и къ оси вращенія OM и направлено въ ту сторону, въ которую вращеніе перемѣщаетъ стрѣлку, направленную по относительной скорости

§ 294. Сложное центробѣжное ускореніе. Изъ (681) слѣдуетъ:

$$j_r = j_n + (-j_n) + (-2v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha) \dots \dots \dots (685)$$

Величина $(-2v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha)$ называется *сложнымъ центробѣжнымъ ускореніемъ* или *ускореніемъ Кориолиса*. Согласно § 293: *сложное центробѣжное ускореніе перпендикулярно къ v_r и къ ОМ и направлено въ сторону противоположную той, куда поворачивается стрѣлка направленная по относительной скорости.*

Если мы будемъ считать его положительнымъ по этому направленію (въ сторону противоположную той, куда поворачивается относительная скорость), то его величина равна:

$$+ 2v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha \dots \dots \dots (686)$$

Итакъ, при относительномъ движеніи точки, имѣющей массу m , появляется особая сила равная $2m \cdot v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha$.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ можно ожидать появленія этой силы съ перваго взгляда на наблюдаемое явленіе. Положимъ, напримѣръ, что стрѣлокъ стрѣляетъ пулей изъ ружья, держа стволъ ружья горизонтально и, во время выстрѣла, быстро поворачивается слѣва направо. Разсмотримъ движеніе пули, пока она идетъ въ стволѣ. Относительная ея траекторія въ стволѣ прямолинейна. Абсолютная траекторія, благодаря вращенію ствола, криволинейна. Понятно, что пуля, стремящаяся по основному закону Ньютона двигаться прямолинейно и принуждаемая вращеніемъ ствола описывать криволинейную абсолютную траекторію, будетъ давить на стѣнку ствола, и, при вращеніи стрѣлка *вправо*, давленіе это будетъ происходить на *лѣвую* стѣнку ствола. Это давленіе и есть та новая сила, которую даетъ ускореніе Кориолиса.

Разберемъ теперь это явленіе съ точки зрѣнія изложенной теоріи. Кориолисово ускореніе дѣйствуетъ въ сторону противоположную той, куда поворачивается относительная скорость: вращали стволъ *вправо* — давленіе должно быть направлено *влѣво*. Ось, около которой вращался стрѣлокъ съ ружьемъ, была вертикальна, а стволъ горизонталенъ, слѣдовательно уголъ $\alpha = 90^\circ$ и $\sin \alpha = 1$. Давленіе пули на стволъ равно, слѣдовательно, $2V_r \cdot \omega \cdot m$, гдѣ V_r скорость пули въ стволѣ, m масса пули, ω угловая скорость вращенія стрѣлка. Если положимъ, напримѣръ, что вѣсъ пули равенъ 20 грам. = 0,02 килограм., скорость ω такова, что конецъ ствола, отстоящій отъ оси вращенія на 1 метръ, обладаетъ линейною скоростью $V = 1$ метръ въ секунду и скорость пули равна 100 метр. въ 1 секунду, то $\omega = \frac{V}{R} = \frac{1}{1} = 1$, масса m , согласно (14), равна $\frac{0,02}{0,981}$ килограммъ.

$$\alpha = 90^\circ, \sin \alpha = 1$$

$$- 2V_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha \cdot m = \frac{2 \cdot 100 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,02}{0,981} = \frac{4}{0,981} = 4,077 = \text{вѣсу } 4077 \text{ грамм.}$$

Давленіе на стволъ происходитъ съ силою равною 4077 грамм., то есть немного большею чѣмъ вѣсъ 4 кил. грамм.

Замѣтимъ, однако, что давленіе на стволъ происходитъ только благодаря вращательному движенію. Дѣйствительно, посмотримъ, производитъ ли пуля давленіе на стволъ ружья, если ружье, какъ бы то ни было скоро, перемѣщается *поступательно* въ направленіи перпендикулярномъ къ стволу съ равномерною скоростью V . Отрѣшимся отъ дѣйствія тяжести. Съ точки зрѣнія теоремы Кориолиса здѣсь $j_x = 0$; $j_y = 0$; $\omega = 0$, а потому и $j_z = 0$. Давленіе на стволъ равно нулю.

Но положимъ, что мы не доверяемъ теоремѣ Кориолиса. Ислѣдуемъ движеніе способомъ, указаннымъ въ § 62-мъ. Возьмемъ ось z вертикально, ось y по первоначальному направленію ствола, ось x по направленію поступательнаго движенія ствола.

Уравненіе связи (ствола) будетъ

$$x = Vt$$

$$z = 0.$$

или

$$f(x, y, z) = x - Vt = 0$$

$$F(x, y, z) = z = 0.$$

Потому:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1; \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0; \frac{\partial F}{\partial y} = 0; \frac{\partial F}{\partial z} = 1$$

Формулы подобныя формуламъ (164) дадутъ:

$$\cos(N', x) = 1; \cos(N', y) = 0; \cos(N', z) = 0$$

$$\cos(N'', x) = 0; \cos(N'', y) = 0; \cos(N'', z) = 1$$

Слѣд вательно формулы (177) примутъ видъ.

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= N' \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= 0 \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= N'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (687)$$

Но 1-ое изъ этихъ уравненій не стоитъ и интегрировать такъ какъ интеграль его (конечное соотношеніе между x и t) уже данъ написаннымъ выше уравненіемъ

$$x = Vt$$

изъ котораго слѣдуетъ $\frac{dx}{dt} = V$, и такъ какъ V принято по условіямъ

задачи постояннымъ, то $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Поэтому (687) даетъ $N' = 0$. Третье уравненіе, благодаря условию $z = 0$, даетъ $N'' = 0$. Следовательно боковое давленіе на стволъ равно нулю, какъ и по теоремѣ Коріолиса.

Изъ другихъ двухъ уравненій и изъ начальныхъ данныхъ получаемъ $\frac{d}{dt} = 0$; $z = 0$; $\frac{dy}{dt} = v_r$; $y = v_r \cdot t$. Исключая t изъ послѣдняго уравненія и изъ уравненія ствола, то есть изъ

$$y = v_r \cdot t$$

$$x = V \cdot t$$

получимъ уравненіе абсолютной траекторіи

$$y = \frac{v_r}{V} \cdot x$$

v_r и V постоянны. Следовательно абсолютная траекторія есть прямая линия, наклоненная къ оси x подъ угломъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{v_r}{V}$.

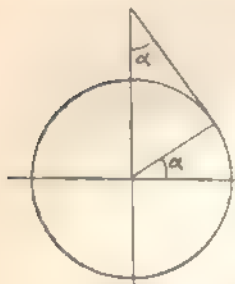
Какую же роль въ этой задачѣ играетъ основной законъ Ньютона? На первый взглядъ можетъ показаться, что движеніе было направлено по оси y и что, согласно 1-му и 2-му законамъ Ньютона, нужна особая сила, напримѣръ давленіе ствола на пулю для того, чтобы измѣнить траекторію по оси y въ траекторію $y = \frac{v_r}{V} x$. Но это только недоразумѣніе: скорость v_r по стволу не есть начальная скорость, начальная скорость складается изъ скорости v_r по оси y и изъ скорости V по оси x , она равна поэтому $\sqrt{v_r^2 + V^2}$ и направлена по прямой, составляющей съ осью x такой уголъ φ , что $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_r}{V}$, то есть какъ разъ по абсолютной прямолинейной траекторіи $y = \frac{v_r}{V} x$. Следовательно точка движется именно по 1-му закону Ньютона: она получила начальную скорость $\sqrt{v_r^2 + V^2}$ по прямой $y = \frac{v_r}{V} x$ и движется равномерно по этой прямой.

Итакъ, сложное центробѣжное, или Коріолисово, ускореніе и возникающая съ нимъ сила происходятъ только отъ вращенія ω относительной траекторіи, какъ это показываетъ и формула этого ускоренія $2v_r \omega \cdot \sin \alpha$; если $\omega = 0$, то и это Коріолисово ускореніе равно нулю.

§ 295. Подмываніе береговъ рѣкъ. Коріолисовымъ ускореніемъ объясняется явленіе, наблюдаемое въ рѣкахъ, особенно въ тѣхъ, которыя имѣютъ меридиональное направленіе.

Положимъ, что рѣка течетъ прямо по меридиану съ сѣвера на югъ въ сѣверномъ полушаріи. Разсмотримъ движеніе частицы воды подѣ географическою широтою α . Изъ чертежа (фиг. 111) видимъ, что траекторія частицы m составляетъ съ осью вращенія земнаго шара уголъ α . Если скорость движенія частицы по теченію обозначимъ чрезъ v_r , то Коріолисово ускореніе будетъ $2v_r \omega \cdot \sin \alpha$. Оно вызоветъ силу $2m v_r \cdot \omega \cdot \sin \alpha$

направленную перпендикулярно къ оси вращения земного шара и перпендикулярно къ рѣкѣ въ сторону противоположную отклоненію рѣки, происходящему отъ суточного вращения земли около оси, то есть съ востока на западъ или, иначе говоря, въ сторону праваго берега рѣки. Частицы идущія у праваго берега поэтому валирають на него и подмываютъ правый берегъ, мало по малу направление рѣки перемѣщается въ сторону праваго берега, какъ это замѣчается особенно рѣзко въ нижнемъ теченіи Волги и даже у Саратова. Чѣмъ ближе къ экватору, тѣмъ меньше $\sin \alpha$ и Кориолисово ускореніе меньше.



Фиг. 111.

§ 296. Аналитическое изслѣдованіе относительнаго движенія. Теорема Кориолиса можетъ быть доказана аналитическимъ путемъ; но прежде чѣмъ приступить къ этому доказательству необходимо познакомиться съ вѣкторными кинематическими формулами.

Представимъ себѣ *подвижную* систему прямоугольныхъ координатъ $O'\xi, O'\eta, O'\zeta$, имѣющую начало въ O . Представимъ себѣ также *неподвижную* систему координатъ Ox, Oy, Oz , имѣющую начало въ O . Пусть (ξ, η, ζ) суть координаты рассматриваемой материальной точки m относительно подвижной системы, (x, y, z) координаты точки m относительно неподвижной системы; x_0, y_0, z_0 координаты подвижнаго начала O' .

Между этими координатами существуютъ слѣдующія формулы преобразованія:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a\xi + b\eta + c\zeta \\ y &= y_0 + a'\xi + b'\eta + c'\zeta \\ z &= z_0 + a''\xi + b''\eta + c''\zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (688)$$

Задача наша состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить соотношенія между *относительнымъ* движеніемъ точки m въ подвижной системѣ осей координатъ, *уносимымъ* движеніемъ самой этой системы и *абсолютнымъ* движеніемъ точки въ системѣ неподвижныхъ осей координатъ.

Продифференцируемъ (688) по t , соображаясь съ тѣмъ, что точка можетъ двигаться относительно осей ξ, η, ζ , такъ что координаты ξ, η, ζ тоже мѣняются со временемъ. Получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_0}{dt} + \left(\xi \frac{da}{dt} + \eta \frac{db}{dt} + \zeta \frac{dc}{dt} \right) + a \frac{d\xi}{dt} + b \frac{d\eta}{dt} + c \frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_0}{dt} + \left(\xi \frac{da'}{dt} + \eta \frac{db'}{dt} + \zeta \frac{dc'}{dt} \right) + a' \frac{d\xi}{dt} + b' \frac{d\eta}{dt} + c' \frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_0}{dt} + \left(\xi \frac{da''}{dt} + \eta \frac{db''}{dt} + \zeta \frac{dc''}{dt} \right) + a'' \frac{d\xi}{dt} + b'' \frac{d\eta}{dt} + c'' \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned} \right\} (689)$$

Величины, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій (689), суть проложенія *абсолютной скорости* точки (x, y, z)

Величины, стоящія до скобокъ и въ скобкахъ правыхъ частей этихъ уравненій, суть производныя по времени отъ x, y, z , взятые такъ, какъ будто ξ, η, ζ были постоянными. Слѣдовательно это—проложенія скорости точки, неизмѣнимо соединенной съ подвижными осями и совпадающей въ моментъ t съ точкою m . Это, слѣдовательно, проложенія скорости *уносящаго движенія*.

Величины, стоящія послѣ скобокъ въ правыхъ частяхъ уравненій (689), суть производныя по времени отъ x, y, z взятые такъ, какъ будто $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ были постоянны. Это—проложенія скорости *относительнаго движенія*.

Слѣдовательно уравненія (689) выражаютъ собою то же, что (679): скорость абсолютнаго движенія есть геометрическая сумма скоростей движеній уносящаго и относительнаго.

Продифференцируемъ уравненія (689). Найдемъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2x_0}{dt^2} + \xi \frac{d^2a}{dt^2} + \eta \frac{d^2b}{dt^2} + \zeta \frac{d^2c}{dt^2} + a \frac{d^2\xi}{dt^2} + b \frac{d^2\eta}{dt^2} + \\ &+ c \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2 \left(\frac{da}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{db}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2y_0}{dt^2} + \xi \frac{d^2a'}{dt^2} + \eta \frac{d^2b'}{dt^2} + \zeta \frac{d^2c'}{dt^2} + a' \frac{d^2\xi}{dt^2} + b' \frac{d^2\eta}{dt^2} + \\ &+ c' \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2 \left(\frac{da'}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{db'}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc'}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2z_0}{dt^2} + \xi \frac{d^2a''}{dt^2} + \eta \frac{d^2b''}{dt^2} + \zeta \frac{d^2c''}{dt^2} + a'' \frac{d^2\xi}{dt^2} + b'' \frac{d^2\eta}{dt^2} + \\ &+ c'' \frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2 \left(\frac{da''}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{db''}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc''}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (690)$$

Здѣсь вторыя производныя, стоящія въ лѣвыхъ частяхъ, суть проложенія *абсолютнаго ускоренія*.

Суммы первыхъ четырехъ членовъ правыхъ частей суть вторыя производныя, взятые отъ x, y, z , полагая ξ, η, ζ постоянными. Это—проложенія ускоренія *уносящаго движенія*.

Суммы слѣдующихъ трехъ членовъ суть вторыя производныя взятые отъ x, y, z , полагая $x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ постоянными. Это—проложенія ускоренія *относительнаго движенія*.

Остающиеся затѣмъ члены въ правыхъ частяхъ суть проложенія того ускоренія, который называется обратнымъ сложнымъ центробѣжнымъ ускореніемъ, или обратнымъ Кориолисовымъ ускореніемъ. Обозначимъ эти

положенія обратнаго Кориолисова ускоренія чрезъ X, Y, Z , такъ что:

$$\left. \begin{aligned} X &= 2 \left(\frac{da}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{db}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ Y &= 2 \left(\frac{da'}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{db'}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc'}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ Z &= 2 \left(\frac{da''}{dt} \cdot \frac{d\xi}{dt} + \frac{db''}{dt} \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{dc''}{dt} \cdot \frac{d\zeta}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (691)$$

Уравненія (690) выражаютъ ту же теорему Кориолиса какъ и уравненіе (684).

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (691) на a , 2-ое на a' , 3-е на a'' и сложимъ. Въ лѣвой части получимъ проложеніе обратнаго Кориолисова ускоренія на ось ξ , въ правой части:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} \left(a \frac{da}{dt} + a' \frac{da'}{dt} + a'' \frac{da''}{dt} \right) + \frac{d\eta}{dt} \left(a \frac{db}{dt} + a' \frac{db'}{dt} + a'' \frac{db''}{dt} \right) + \\ + \frac{d\zeta}{dt} \left(a \frac{dc}{dt} + a' \frac{dc'}{dt} + a'' \frac{dc''}{dt} \right). \end{aligned}$$

Называя проложенія обратнаго Кориолисова ускоренія на оси ξ, η, ζ чрезъ J_x, J_y, J_z , и сообразуясь съ формулами (667), (668), получимъ:

$$J_x = 2 \left(q \frac{d\zeta}{dt} - r \frac{d\eta}{dt} \right).$$

Такія же формулы можно получить для J_y и J_z . Всего получимъ 3 уравненія:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= 2 \left(q \frac{d\zeta}{dt} - r \frac{d\eta}{dt} \right) \\ J_y &= 2 \left(r \frac{d\xi}{dt} - p \frac{d\zeta}{dt} \right) \\ J_z &= 2 \left(p \frac{d\eta}{dt} - q \frac{d\xi}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \quad (691)$$

Полагая $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J^2$ и складывая получимъ:

$$\begin{aligned} J^2 = 4 \left[(p^2 + q^2 + r^2) \left(\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right) - \left(p \frac{d\xi}{dt} + \right. \right. \\ \left. \left. + q \frac{d\eta}{dt} + r \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] \quad (693) \end{aligned}$$

Но въ § 288 мы видѣли, что p, q, r суть проложенія вращенія ω на подвижныя оси, такъ что:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$$

Не трудно видѣть, что

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 = v^2,$$

такъ какъ $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ суть проложія относительной скорости на подвижныя оси. Поэтому еще:

$$p \frac{d\xi}{dt} + q \frac{d\eta}{dt} + r \frac{d\zeta}{dt} = \omega \cdot v_r \cos(\omega, v_r).$$

Слѣдовательно (693) принимаетъ видъ:

$$J'^2 = 4\omega^2 v_r^2 (1 - \cos^2(\omega, v_r))$$

или

$$J' = 2\omega v_r \sin(\omega, v_r).$$

Называя уголъ, составляемый относительною скоростью v_r съ осью вращенія ω , черезъ α , получимъ:

$$J' = 2\omega v_r \sin \alpha \text{ — обратное Кориолисово ускореніе}$$

совершенно согласно съ § 292 и 293.

§ 297. Уравненія относительнаго движенія точки. Обозначимъ чрезъ F' равнодѣйствующую силу дѣйствующихъ на точку m , такъ что

$$mj_m = F'.$$

Тогда теорема Кориолиса даетъ геометрическое равенство:

$$F' = mj_m + mJ'.$$

Отсюда

$$\overline{mj_m} = \overline{F'} - \overline{mJ'} \dots \dots \dots (694)$$

Условимся въ слѣдующихъ обозначеніяхъ:

x, y, z координаты точки относительно подвижныхъ осей (которыя мы прежде обозначали буквами ξ, η, ζ);

X, Y, Z проложія силы F' на подвижныя оси;

$(je)_x, (je)_y, (je)_z$ проложія центробѣжныхъ ускореній на подвижныя оси;

J'_x, J'_y, J'_z проложія обратнаго Кориолисова ускоренія J' на подвижныя оси.

Геометрическое равенство (694) равносильно слѣдующимъ тремъ уравненіямъ между проложеніями:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X - m(je)_x - mJ'_x \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - m(je)_y - mJ'_y \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= Z - m(je)_z - mJ'_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (695)$$

Векторъ ($-m\epsilon$), равный и противоположный произведенію уносящаго ускоренія на массу, называется *уносящей силой* или *центробѣжной силой*.

Векторъ ($-mJ$), равный произведенію Кориолисова ускоренія на массу называется *Кориолисовою силой* или *сложною центробѣжною силой*.

Уравненія (645) суть уравненія относительнаго движенія. Ихъ составъ показываетъ слѣдующее: уравненія относительнаго движенія точки, отнесенной къ подвижнымъ осямъ координатъ таковы, какъ будто при неподвижности этихъ осей кроме данныхъ силъ еще дѣйствуютъ на точку *уносящая сила* и *Кориолисова сила*.

Задачи на относительное движеніе можно рѣшать такъ, какъ будто бы уносящаго движенія не было, но не забывать при этомъ добавлять къ дѣйствующимъ силамъ еще двѣ: уносящую и Кориолисову. Тогда получимъ уравненія (695), въ которыхъ j_x и J считаются данными. Интегрируя (695) получимъ x , y , z какъ функции времени t , то есть уравненія относительнаго движенія точки въ конечномъ видѣ.

Замѣтимъ, что при обозначеніяхъ, принятыхъ въ этомъ параграфѣ, уравненія (692) дадутъ:

$$\left. \begin{aligned} -mJ_x &= -2m \left(q \frac{dy}{dt} - r \frac{dx}{dt} \right) \\ -mJ_y &= 2m \left(r \frac{dz}{dt} - p \frac{dx}{dt} \right) \\ -mJ_z &= -2m \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dz}{dt} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (696)$$

§ 298. Живая сила относительнаго движенія. Помноживъ 1-ое изъ уравненій (695) на dx , 2-ое на dy , 3-е на dz и сложивъ, получимъ:

$$\frac{dmv^2}{2} = Xdx + Ydy + Zdz - m(j\epsilon)_x dx - m(j\epsilon)_y dy - m(j\epsilon)_z dz \quad (697)$$

такъ какъ при этомъ уничтожатся члены содержащіе J'_x , J'_y , J'_z , (благодаря уравненіямъ 696).

(647) показываетъ, что дифференціалъ живой силы относительнаго движенія равенъ суммѣ элементарной работы дѣйствующихъ и элементарной работы уносящей силы.

§ 299. Относительное равновѣсіе точки. Полагая въ (695) и въ (696) равными нулю первыя и вторыя производныя по времени отъ x , y , z , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} X - m(j\epsilon)_x &= 0 \\ Y - m(j\epsilon)_y &= 0 \\ Z - m(j\epsilon)_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (698)$$

$$J = 0 \quad \dots \dots \dots (699)$$

Эти уравненія (698) и (699) можно разсматривать какъ уравненія относительнаго равновѣсія точки. Они показываютъ, что въ относительномъ равновѣсїи точки равнодѣйствующая F данныхъ силъ уравновѣшивается уносящею (центробѣжною) силою.

Въ относительномъ равновѣсїи точка m остается въ покоѣ на движущейся кривой, если не получаетъ начальной скорости.

Понятіе объ относительномъ равновѣсїи лучше всего выяснится на слѣдующемъ примѣрѣ.

Примѣръ. Найти положеніе относительнаго равновѣсія точки m , находящейся на плоской кривой C , вращающейся около лежащей въ ея плоскости вертикали Oz съ равномерною скоростью ω , если между точкою m и кривою C существуетъ тренїя (фиг. 112).

Силы, дѣйствующія на точку m , суть: ея вѣсъ $(-mg)$ и давленіе N , оказываемое кривою C по ея нормали.

Согласно сказанному въ настоящемъ параграфѣ можно разсматривать кривую C какъ неподвижную и составить уравненіе равновѣсія между центробѣжною (уносящею) силою и дѣйствующими силами N и $(-mg)$.

Обозначимъ черезъ ρ разстояніе положенія равновѣсія точки m отъ оси Oz . Точка кривою C , совпадающая съ положеніемъ равновѣсія точки m , описываетъ горизонтальную окружность радиуса ρ . Поэтому ускореніе уносящаго движенія будетъ, согласно съ (112):

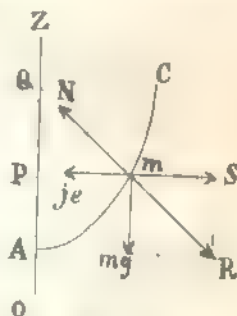
$$\omega^2 \rho.$$

Оно направлено отъ m къ оси Oz . Слѣдовательно уносящая (центробѣжная) сила равна $m\omega^2 \rho$ и направлена по Pm въ сторону отъ оси Oz . Для равновѣсія силъ $m\omega^2 \rho$, $(-mg)$ и N необходимо и достаточно, чтобы $m\omega^2 \rho$ и $(-mg)$ имѣли равнодѣйствующую направленную по нормали къ кривой C . Изъ подобныхъ треугольниковъ mPQ и mSR имѣемъ:

$$PQ = \frac{mg\rho}{m\omega^2 \rho} = \frac{g}{\omega^2}.$$

Слѣдовательно, положенія относительнаго равновѣсія точки m находятся въ тѣхъ мѣстахъ кривой, гдѣ субнормаль равна $\frac{g}{\omega^2}$ и основаніе Q нормали лежитъ надъ основаніемъ P перпендикуляра mP .

Если кривая C есть парабола, ось которой вертикальна и нижняя точка лежитъ въ вершинѣ, то при скорости ω удовлетворяющей уравненію $p = \frac{g}{\omega^2}$ (гдѣ p параметръ параболы $x^2 = 2pz$), во всякой точкѣ параболы точка m будетъ въ равновѣсїи, если же p не равно $\frac{g}{\omega^2}$, то ни



Фиг. 112.

въ какой точкѣ параболы точка m не находится въ равновѣснн. Поэтому поверхность жидкости помѣщенной въ сосудѣ вращающемся около вертикали съ равномерною скоростью ω располагается по параболонду вращения, описанному параболою $x^2 = 2\rho z$, въ которой $\rho = \frac{g}{\omega^2}$.

Если кривая C есть окружность, то:

$$QP = R \cos \alpha = \frac{g}{\omega^2}.$$

Съ увеличеніемъ ω увеличивается α . На этомъ основанъ регуляторъ Уатта для паровой машины.

ГЛАВА II.

Относительное движеніе и относительное равновѣсіе.

§ 300. Общія соображенія Изъ предыдущей главы слѣдуетъ: для того чтобы получить уравненіе движенія системы точекъ относительно подвижныхъ осей координатъ Ox , Oy , Oz , можно составить уравненія движенія такъ, какъ будто эти оси были неподвижны, если только прибавить къ дѣйствующимъ силамъ еще, для каждой точки системы, силу центробѣжную ($m\epsilon$) и силу Кориолис въ $(-mJ)$.

Если система представляетъ собою абсолютно твердое тѣло, то, вообще говоря, центробѣжныя силы приводятся къ совокупности одной силы и одной пары. Но бываютъ случаи, когда центробѣжныя силы приводятся къ одной силѣ.

§ 301. Одинъ изъ случаевъ, когда центробѣжныя силы приводятся къ одной равнодѣйствующей. Положимъ, что заданное движеніе подвижныхъ осей Ox , Oy , Oz состоитъ въ томъ, что онѣ вращаются равномерно со скоростью ω около оси AB (фиг. 113) и что прямая Gz' проведенная чрезъ центръ тяжести даннаго твердаго тѣла параллельно AB есть одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи тѣла (фиг. 113).

Докажемъ, что въ этомъ случаѣ центробѣжныя силы приводятся къ одной равнодѣйствующей.

Примемъ Gz и двѣ перпендикулярныя къ ней оси Gx , Gy' за оси координатъ. Пусть уравненія прямой AB будутъ.

$$x' = a$$

$$y' = b.$$

Центробѣжная сила, приложенная къ точкѣ m тѣла, будетъ:

$$m\omega^2, \overline{mr}$$

гдѣ mr разстояніе точки m отъ оси. AB . Проекціи этой центробѣжной

силы суть:

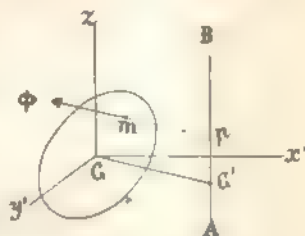
$$m\omega^2 (x' - a); m\omega^2 (y' - b); 0 \dots \dots \dots (700)$$

следовательно проложения равнодействующей всех таких сил, действующих на все точки тела, будутъ:

$$\Sigma m\omega^2 (x' - a); \Sigma m\omega^2 (y' - b); 0 \dots (701)$$

Но начало координатъ взято въ центрѣ тяжести. Поэтому

$$\Sigma mx' = 0; \Sigma my' = 0.$$



Следовательно величины (701) получаютъ видъ:

$$- M\omega^2 a, - M\omega^2 b, 0,$$

Фиг. 113.

гдѣ M —масса тела.

Проложения момента равнодействующей пары всехъ силъ (700) будутъ:

$$\left. \begin{aligned} & - \Sigma m\omega^2 x' (y' - b) \\ & - \Sigma m\omega^2 x' (x' - a) \\ & - \Sigma m\omega^2 ay' - bx' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (702)$$

Но Gz' , согласно условіямъ задачи, есть одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи; оси x' и y' можно взять по другимъ двумъ главнымъ центральнымъ осямъ; тогда

$$\Sigma mx'y' = 0; b \Sigma mx' = 0, \Sigma mx'x' = 0; a \Sigma mx' = 0; a \Sigma my' = 0, b \Sigma mx = 0,$$

вслѣдствие чего проложения (702) момента равнодействующей пары равны нулю. Что и требовалось доказать.

Итакъ, центробѣжныя силы приводятся въ данномъ случаѣ къ одной равнодействующей, проложения которой суть

$$- M\omega^2 a; - M\omega^2 b, 0 \dots \dots \dots (703)$$

Эта сила равна $M\omega^2 GG'$ и направлена по GG' , гдѣ G' есть проекція центра тяжести G на ось AB .

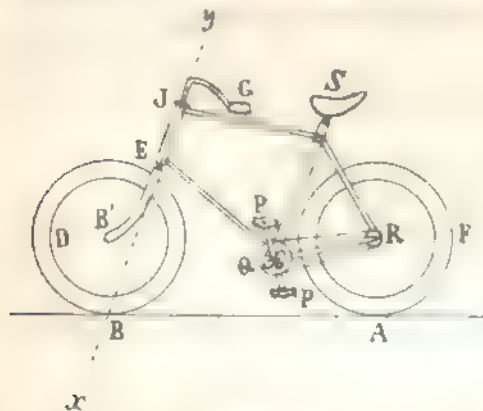
§ 302. Относительное равновѣсіе велосипеда. Приложимъ предыдущую теорію къ относительному равновѣсію велосипеда, изслѣдованному недавно въ интересной книгѣ Бурле (*Bourlet, Traité des bicycles et bicyclettes*).

Главная часть велосипеда, къ которой прикрѣпляются остальные его части, состоитъ изъ пятиугольной рамы $RQFIS$ (фиг. 114). Сзади рамы находится ось R «неподвижная» (то-есть находящаяся всегда въ плоскости рамы) колеса F . Впередѣ рамы находится мѣфта EJ , въ которую вставлена направляющая трубка, оканчивающаяся внизу, по выходѣ изъ

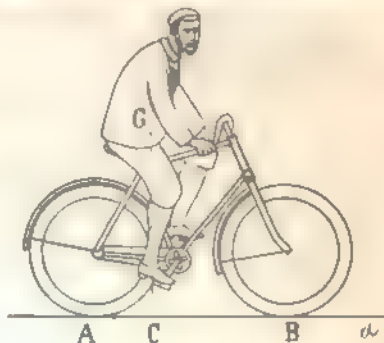
муфты вилок EB' , на которой насажена ось «рулевого» колеса D . Къ верхнему концу направляющей трубки прикрѣпленъ рулевой рычагъ, представляющій собою кривую почти горизонтальную трубку, оканчивающуюся рукоятками, которая велосипедистъ держитъ въ рукахъ. Велосипедистъ сидитъ на сѣдлѣ S , укрѣпленномъ въ срединѣ верхней части рамы.

Рама устроена симметричною относительно *средней плоскости*, проходящей чрезъ ось направляющей трубки EJ , чрезъ центръ сѣдла S и чрезъ центръ R «неподвижнаго» колеса F .

Плоскость неподвижнаго колеса всегда совпадаетъ съ *среднею плоскостью*. Плоскость рулевого колеса велосипедистъ можетъ наклонять къ средней плоскости, дѣйствуя на рукоятки. Плоскость рулевого колеса совпадаетъ съ *среднею плоскостью* при такомъ положеніи рукоятокъ, когда



Фиг. 114.



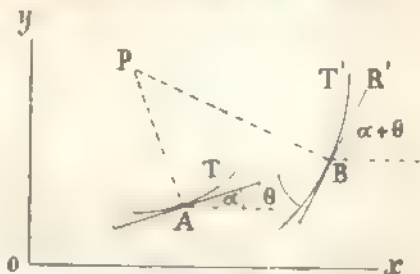
Фиг. 115.

они одинаково удалены отъ средней плоскости, тогда средняя плоскость оказывается плоскостью симметріи всего сваряда, если пренебречь передаточною цѣпью и зубчатками, имѣющими сравнительно небольшую массу. Обозначимъ чрезъ A и B точки соприкосновения задняго и рулевого колеса съ землею. Предположимъ, что ось x направляющей трубки проходитъ чрезъ точку B , такъ, что точка B есть точка, неизмѣнно соединенная съ неподвижною *среднею плоскостью*, и длина AB не измѣняется отъ поворотовъ руля (состояшаго изъ рулевого колеса, направляющей трубки, рулевого рычага и рукоятокъ). Если грунтъ, по которому катится велосипедъ, плоскій, то AB есть пересѣченіе плоскости грунта со *среднею плоскостью*. Предположимъ (въ первомъ приближеніи), что велосипедистъ сидитъ спокойно, такъ, что его центръ тяжести находится въ *средней плоскости*. Тогда общій центръ тяжести G всей машины, вмѣстѣ съ велосипедистомъ, неподвиженъ въ подвижной *средней плоскости*, и основаніе C' (фиг. 115) вертикали, проходящей чрезъ G , неподвижно по отношенію къ точкамъ A и B .

Исследуемъ прежде всего видъ линій, чертимыхъ колесами на землѣ

если плоскость рулевого колеса составляет постоянный уголъ со среднею плоскостью. Предположимъ, что грунтъ плоскій и примемъ плоскость грунта за плоскость чертежа (фиг. 116). Пусть A и B суть точки прикосновения колесъ къ грунту; AR и BR' пересѣченія плоскостей колесъ съ плоскостью грунта. Согласно сказанному, направления AR и AB совпадаютъ.

Уголъ θ составляемый прямою BR' и AB остается постояннымъ, при предположенномъ постоянствѣ наклоненія рулевого колеса къ средней плоскости, если наклоненіе средней плоскости къ вертикали не измѣняется. Прямая AR и BR' направлены почти по касательнымъ къ линиямъ, чертимымъ колесами. Если принять ихъ за касательныя къ этимъ линиямъ, то можно показать, что точки A и B описываютъ окружности около общаго центра P (фиг. 116), находящагося на пересѣченіи перпендикуляровъ къ касательнымъ AR и BR .



Фиг. 116.

Дѣйствительно, пусть:

x, y — координаты точки A ;

b — длина AB ;

α — уголъ, составляемый прямою AB съ осью x ;

$\alpha + \theta$ — уголъ, составляемый касательною BR' съ осью x ;

x', y' — координаты точки B ;

s и s' — дуги, описываемыя по грунту точками A и B .

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + b \cdot \cos \alpha \\ y' &= y + b \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (704)$$

Извѣстно, что

$$\left. \begin{aligned} dx &= ds \cdot \cos \alpha; & dx' &= ds' \cdot \cos (\alpha + \theta) \\ dy &= ds \cdot \sin \alpha; & dy' &= ds' \cdot \sin (\alpha + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (705)$$

Поэтому дифференцируя (704), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} ds' \cdot \cos (\alpha + \theta) &= ds \cdot \cos \alpha - b \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \\ ds' \cdot \sin (\alpha + \theta) &= ds \cdot \sin \alpha + b \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (706)$$

Изъ (706) находимъ:

$$\left. \begin{aligned} ds' \cdot \cos \theta &= ds \\ ds' \cdot \sin \theta &= b d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (707)$$

Если s и s' суть радиусы кривизны кривыхъ, чертимыхъ на грунту

точками A и B , то, какъ известно:

$$\left. \begin{aligned} ds &= \rho d\alpha \\ ds' &= \rho' d\alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (708)$$

Подставляя эти величины ds и ds' въ (707), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \rho' \cdot \cos \theta &= \rho \\ \rho' \cdot \sin \theta &= b \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (709)$$

Эти формулы (709) показываютъ, что при θ постоянномъ ρ' и ρ постоянны. Изъ треугольника ABP , въ которомъ уголъ ABP равенъ $90^\circ - \theta$, видно, что

$$\rho = AP, \quad \rho' = BP.$$

Итакъ, колеса описываютъ по грунту концентрические окружности если θ постоянно. При этомъ прямая AB вращается около P съ постоянною скоростью, если скорость велосипеда не мѣняется.

Теперь изслѣдуемъ самое равновѣсiе велосипеда, если онъ совершаетъ описанное движенiе.

Выберемъ въ пространствѣ слѣдующую систему осей координатъ (фиг. 117). Примемъ за начало координатъ проекцію C общаго центра тяжести на грунтъ. Вертикаль, проходящую чрезъ C , примемъ за ось z ; прямую AB за ось x , перпендикуляръ къ ней за ось y . Такимъ образомъ плоскость (x, y) перпендикулярна къ средней плоскости велосипеда и пересѣкаетъ ее по прямой CM , которая, положимъ, образуетъ съ вертикалью уголъ β = отклоненiю велосипеда отъ вертикали. Замѣтимъ, что выбранная нами оси подвижны: онѣ слѣдуютъ за движенiемъ прямой AB , и слѣдовательно, при постоянствѣ угла θ вращаются около оси, проходящей чрезъ P . Итакъ: для того чтобы велосипедъ не упалъ и уголъ β оставался постояннымъ, необходимо и достаточно, чтобы велосипедъ былъ въ относительномъ равновѣсiи относительно осей x, y, z , вращающихся около вертикали, проходящей чрезъ P . Должно, следовательно существовать равновѣсiе между реакцiею грунта, силою тяжести и центробѣжными силами.

Сила тяжести равна Mg , гдѣ M масса велосипеда съ велосипедистомъ. Эту силу изобразимъ векторомъ GS (фиг. 118), приложеннымъ къ центру тяжести G .

Центробѣжныя силы приводятся (приблизительно къ одной равнодѣйствующей F , приложенной къ G и направленной по GG' перпендикулярно къ оси вращенiя PP' , согласно предыдущему параграфу. Такое допущенiе Бурде оправдываетъ слѣдующими соображенiями: ось CG можно принять приблизительно за ось симметрiи; уголъ β обыкновенно не великъ, такъ что вертикаль GD можно приблизительно принять за ось симметрiи, то-есть за одну изъ главныхъ центральныхъ осей инерцiи, и такимъ обра-

зомъ, согласно предыдущему параграфу, можно допустить, что центробѣжная сила приводится къ равнодѣйствующей.

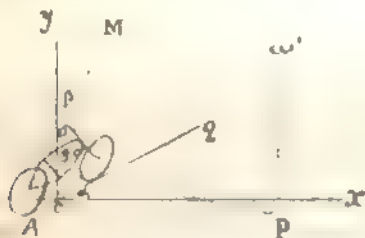
Для того чтобы исключить реакцію грунта, выразимъ, что статическій моментъ силъ F и Mg относительно оси AB долженъ быть равенъ нулю. Это все равно, что положить условие, чтобы сумма моментовъ проекцій этихъ силъ на плоскость (x, y) относительно C была равна нулю. Проекція F' силы F равна $F \cos \psi$, гдѣ ψ есть уголъ FGF' , такъ что условие равновѣсія будетъ:

$$F \cdot \cos \psi \cdot \overline{GD} = Mg \cdot GD \cdot \operatorname{tg} \beta$$

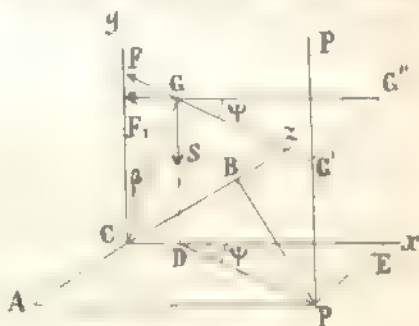
или

$$F \cdot \cos \psi \cdot \cos \beta = Mg \cdot \sin \beta \quad . \quad . \quad . \quad (710)$$

Пусть G' есть проекція точки G на PP ; G проекція точки G' на плоскость (x, y) . Треугольникъ $GG'G$ проектируется на горизонтальную



Фиг. 117.



Фиг. 118.

плоскость въ видѣ равнаго ему треугольника DPE , въ которомъ $DP = GG'$ равно радиусу r окружности, описываемой центромъ тяжести G около оси PP , PE равно постоянной длинѣ AC , которую обозначимъ чрезъ c . Изъ треугольника DPE имѣемъ:

$$\sin \psi = \frac{c}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (711)$$

Центробѣжная сила F , согласно (106), равна $M \frac{v^2}{r}$:

$$F = M \frac{v^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (712)$$

Изъ (710), (711) и (712) получимъ:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v^2}{rg} \sqrt{1 - \frac{c^2}{r^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (713)$$

Если r достаточно велико сравнительно съ c для того, чтобы можно было пренебречь величиною $\frac{c^2}{r^2}$ въ (713), то получимъ:

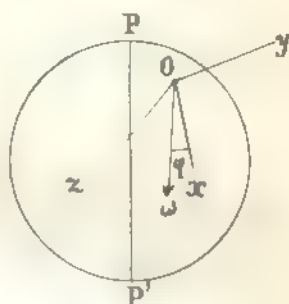
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v^2}{rg} \quad . \quad . \quad . \quad (714)$$

Давныя силы, дѣйствующія на m , суть: 1) притяженіе A землею; 2) равнодѣйствующая F заданныхъ силъ, проложенія которой обозначимъ чрезъ X , Y , Z .

Согласно изложенной теоріи можно считать земной шаръ неподвижнымъ, но прибавить при этомъ еще центробѣжную силу ($-mJe$) и Кориолисову силу (mJ).

То, что мы называемъ вѣсомъ mg точки, есть равнодѣйствующая притяженія и центробѣжной силы ($-mJe$). Эта равнодѣйствующая направлена къ центру земли по вертикали.

Опредѣлимъ Кориолисову силу. Обозначимъ чрезъ φ широту мѣста O и будемъ считать положительнымъ то вращеніе, которое, вращаетъ по направленію стрѣлки часовъ, если смотрѣть съ конца вектора, по которому оно откладывается, на начало этого вектора. Земля вращается съ запада на востокъ. Слѣдовательно угловая скорость ω мгновеннаго вращенія изобразится векторомъ $O\omega$ параллельнымъ земной оси и направленнымъ къ югу. Поэтому проекціи p , q , r вращенія ω на оси x , y , z будутъ:



Фиг. 119.

$$\left. \begin{aligned} p &= \omega \cdot \cos (\omega, x) = \omega \cdot \cos \varphi \\ q &= 0 \\ r &= \omega \cdot \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (716)$$

Поэтому, согласно (696), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} -mJ_x &= 2m\omega \sin \varphi \frac{dy}{dt} \\ -mJ_y &= -2m \left(\sin \varphi \cdot \frac{dx}{dt} - \cos \varphi \cdot \frac{dz}{dt} \right) \\ -mJ_z &= -2m\omega \cdot \cos \varphi \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (717)$$

Слѣдовательно уравненія относительнаго движенія будутъ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= X + 2m\omega \cdot \sin \varphi \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= Y - 2m\omega \left(\sin \varphi \frac{dx}{dt} - \cos \varphi \frac{dz}{dt} \right) \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= mg + Z - 2m\omega \cdot \cos \varphi \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (717)$$

Эти формулы вѣрны, конечно, только въ томъ случаѣ, если точка m настолько близка къ O , что ея вѣсъ можно считать равнымъ mg .

Для живой силы, согласно (697), получимъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz + mgdz \quad . \quad . \quad (719)$$

Если существуетъ силовая функція U , то (719) принимаетъ видъ:

$$\frac{mv^2}{2} + U = mgz \quad . \quad . \quad (720)$$

§ 304. Маятникъ Фуко. Было время, когда предполагали, что земля неподвижна и что весь небесный сводъ со всѣми звѣздами вращается около земли, и казалось, что такое мнѣніе оправдывается ежедневнымъ наблюденіемъ видимаго обращенія небесныхъ свѣтилъ. Только Коперникъ (1473—1543) впервые высказалъ мнѣніе, что суточное обращеніе свѣтилъ только кажущееся явленіе, а въ дѣйствительности земля обращается около оси. Галилея (1564—1642), защищавшаго идею Коперника, даже пытали за такое отступленіе отъ завітовъ Аристотеля и Птолемея. Во времена Коперника и Галилея доказательствомъ вращенія земли служила лишь необыкновенная простота движеній планетъ, вытекающая изъ предположенія о томъ, что всѣ планеты вѣсятъ съ землею обращаются около солнца и земля вращается около оси. Впослѣдствіи, начиная съ Ньютона, было много попытокъ доказать вращеніе земли какимъ-либо опытомъ. Ньютону принадлежитъ идея доказательства, основаннаго на отклоненіи пути падающаго тѣла отъ вертикали, которое должно происходить вслѣдствіе вращенія земли. Но это отклоненіе чрезвычайно мало и потому трудно наблюдаемо.

Самое блестящее доказательство вращеніе земли далъ Фуко (Foucault) произведя въ пантеонѣ, въ Парижѣ, знаменитый опытъ съ маятникомъ. Фуко показалъ, что плоскость, въ которой качается маятникъ, состоящій изъ тяжелаго шара, подвѣшеннаго на длинной нити, должна, вслѣдствіе вращенія земли, вращаться со скоростью зависящею отъ скорости вращенія земли и отъ широты φ . Фуко произвелъ свой опытъ въ пантеонѣ съ маятникомъ, длина нити котораго была 67 метровъ, въ 1851 году. Изслѣдуемъ движеніе такого маятника.

Возьмемъ начало координатъ, расположенныхъ согласно § 303, въ точкѣ подвѣса маятника. Обозначимъ чрезъ l разстояніе отъ точки подвѣса до центра тяжести шара.

Кромѣ вѣса на маятникъ дѣйствуетъ натяженіе нити, которое мы обозначимъ чрезъ mN , гдѣ m масса шара. Вмѣсто шара лучше пользоваться, для уменьшенія сопротивленія оказываемаго воздухомъ, тяжелой пчелицею.

Проложенія натяженія mN вѣти суть:

$$-mN \frac{x}{l}; \quad -mN \frac{y}{l}; \quad -mN \frac{z}{l} \dots \dots \dots (721)$$

Поэтому уравненія (718) примутъ въ настоящемъ случаѣ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -N \frac{x}{l} + 2\omega \cdot \sin \varphi \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -N \frac{y}{l} - 2\omega \left(\sin \varphi \cdot \frac{dx}{dt} - \cos \varphi \cdot \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - N \frac{z}{l} - 2\omega \cdot \cos \varphi \cdot \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (722)$$

Въ виду затрудненій, представляемыхъ интегрированіемъ этихъ уравненій, рассмотримъ только небольшія колебанія, при которыхъ $\frac{x}{l}$; $\frac{y}{l}$; ω суть столь малыя величины, что квадратами ихъ можно пренебречь сравнительно съ конечными величинами.

Тогда можно положить $z = l$, потому что уравненіе сферы, по которой движется центръ тяжести чечевицы даетъ:

$$z = l \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

и, пренебрегая величинами $\frac{x^2}{l^2}$ и $\frac{y^2}{l^2}$, получимъ $z = l$; значитъ можно допустить, что центръ тяжести чечевицы, движется въ горизонтальной плоскости.

Тогда 3-е изъ уравненій (722) даетъ:

$$N = g.$$

Поэтому два первыхъ уравненія изъ (722) принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{g}{l} x + 2\omega \cdot \sin \varphi \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{g}{l} y - 2\omega \cdot \sin \varphi \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (723)$$

Это суть уравненія движенія центра чечевицы въ горизонтальной плоскости, въ которой онъ, приблизительно, движется при малыхъ отклоненіяхъ маятника отъ вертикали.

Помноживъ 1-ое изъ уравненій (723) на dx , 2-ое на dy , и сложивъ, получимъ:

$$\frac{dv^2}{2} = -\frac{g}{l} (x dx + y dy) \dots \dots \dots (724)$$

Интегрируемъ это уравненіе, пользуясь формулою (141), переходимъ къ полярнымъ координатамъ r и θ , и уравненіемъ:

$$d(r^2) = d(x^2 + y^2) = 2(x dx + y dy)$$

Получимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{g}{l} r^2 + h \dots \dots \dots (725)$$

гдѣ h постоянное интегрир.іи.

Помножимъ 1-ое изъ уравненій (723) на $(-y)$, 2-е на x и сложимъ. Получимъ:

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = -2\omega \cdot \sin \varphi \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right).$$

Интегрируемъ это уравненіе, переходя къ полярнымъ координатамъ и пользуясь формулою (135). Получимъ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = -r^2 \cdot \omega \cdot \sin \varphi + C$$

гдѣ C постоянное интегрир.іи. Полагая:

$$\omega \cdot \sin \varphi = \omega' \dots \dots \dots (726)$$

получимъ:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = -\omega' \cdot r^2 + C \dots \dots \dots (727)$$

Разберемъ 2 случая:

I. Маятникъ находится въ положеніи равновѣсія и получаетъ небольшой толчекъ, вслѣдствіе котораго начинаетъ качаться. Въ началѣ такого движенія $r = 0$. Слѣдовательно $C = 0$, и (726) принимаетъ видъ:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega'.$$

Откуда:

$$\theta = \theta_0 - \omega' \cdot t.$$

Слѣдовательно, маятникъ качается въ плоскости, вращающейся со скоростью $(-\omega')$, то есть, согласно съ (726), равномерно въ сторону противоположную ω , то есть противоположно вращенію земли: плоскость качанія вращается въ сторону движенія тѣни солнечныхъ часовъ. Полное обращеніе плоскости качанія маятника произойдетъ въ теченіи времени $\frac{2\pi}{\omega'}$, или, согласно (726), въ теченіи времени:

$$\frac{2\pi}{\omega \cdot \sin \varphi}.$$

Но $\frac{2\pi}{\omega} = 24$ часа. Слѣдовательно полное обращеніе плоскости качанія маятника равно:

$$\frac{24 \text{ часа}}{\sin \varphi}$$

гдѣ φ широта мѣста. Для Парижа $\frac{24 \text{ часа}}{\sin \varphi}$ почти равно 32 часамъ.

II. Маятникъ отклоненъ немного отъ положенія равновѣсія, такъ что начальная величина r не равна нулю; затѣмъ маятникъ предоставленъ дѣйствію силы тяжести и совершаетъ небольшія качанія.

Уравненіе (727) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} + \omega \right) = C \quad (729)$$

Положимъ:

$$\theta + \omega t = \Psi \quad (730)$$

Тогда уравненіе (729) принимаетъ видъ:

$$r^2 d\Psi = C dt \quad (731)$$

Сравнивъ (731) съ (137), видимъ, что центръ качанія движется, подчиняясь закону площадей.

Уравненіе (731) выражено въ такихъ полярныхъ координатахъ, полярная ось которыхъ Ox вращается со скоростью ω около O въ направленіи противоположномъ вращенію земли, потому что если

$$\text{уголъ } xOx_1 = \omega t$$

$$\text{то уголъ } x_1Om = \theta + \omega t = \Psi$$

Полагая въ (725), согласно (730):

$$\theta = \Psi - \omega t$$

получимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left[\left(\frac{d\Psi}{dt} \right)^2 + \omega'^2 - 2\omega' \frac{d\Psi}{dt} \right] = \frac{g}{l} r^2 + h.$$

Полагая здѣсь, согласно съ (731),

$$r^2 \frac{d\Psi}{dt} = C$$

пренебрегалъ весьма малымъ членомъ $r^2 \omega'^2$ и обозначая чрезъ h' новое постоянное, получимъ:

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\Psi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} r^2 + h' \quad (732)$$

Это уравненіе имѣетъ такой же видъ какъ (725), поэтому оно произошло отъ уравненія:

$$\frac{dx'^2}{2} = - \frac{g}{l} (x'dx' + y'dy') \quad (733)$$

такъ, какъ 725 произошло отъ 724. Въ (733) x и y' суть координаты относительно системы осей вращающихся около O со скоростью ω въ сторону противоположную вращенію земли, потому что Ox есть упомянутая выше вращающаяся полярная ось.

Итакъ, движеніе центра чечевицы относительно вращающейся системы осей Ox' , Oy' , таково, что его интеграль площадей (731) и интеграль живой силы такіе же, какъ въ движеніи точки, притягиваемой центромъ пропорціонально разстоянію (см. задачу въ концѣ главы II Отд. I-го). Поэтому траекторія центра чечевицы m есть эллипсъ, вращающійся около своего центра O со скоростью ω' въ сторону противоположную вращенію земли (въ сторону вращенія тѣни солнечныхъ часовъ). Полный оборотъ этотъ эллипсъ совершитъ въ теченіи времени $\frac{2\pi}{\omega'}$. Точка же m движется по этому эллипсу такъ (см. задачу въ концѣ главы II Отд. I-го), что полное ея обращеніе по эллипсу совершается въ теченіи времени:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Посмотримъ какова большая ось этого эллипса и въ какую сторону точка m (центр чечевицы) по нему обращается.

Въ опытѣ Фуко чечевица отклоняется на вѣкоторое начальное разстояніе l , отъ O и закручивается въ этомъ положеніи помощью нити, другой конецъ которой укрѣпленъ въ стѣнѣ. Нить пережигаютъ пламенемъ свѣчи, и маятникъ начинаетъ качаться. Поэтому начальная скорость относительно осей O , x , y , z равна нулю. Поэтому начальныя величины $\frac{dr}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ равны нулю. Начальная величина r , радиуса вектора r есть большая полуось эллипса, потому что въ началѣ $\frac{dr}{dt} = 0$ и слѣдовательно въ началѣ r имѣетъ или максимальную или минимальную (очевидно максимальную) величину.

Уравненіе (727), если въ немъ положить $r = a$; $\frac{d\theta}{dt} = 0$, даетъ $C' = a^2\omega'$. Слѣдовательно, согласно съ (731), начальная величина $\frac{d\theta}{dt}$ положительна и равна ω' . Поэтому точка m обращается въ сторону вращенія ω' , то есть, согласно съ (726), въ сторону вращенія земли.

Итакъ: въ опытѣ Фуко центр чечевицы маятника обращается по эллипсу въ сторону вращенія тѣни горизонтальныхъ солнечныхъ часовъ, самъ же этотъ эллипсъ вращается въ сторону противоположную вращенію тѣни горизонтальныхъ солнечныхъ часовъ. Полное вращеніе по эллипсу совершается въ теченіи времени $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Полное вращеніе эллипса совершается равномерно въ теченіи времени $\frac{2\pi}{\omega' \sin \varphi}$, гдѣ φ есть широта мѣста наблюденія. Всѣ эти выводы подтвердились опытомъ Фуко.

Теорія маятника Фука можетъ быть дополнена еще слѣдующею теоремою.

Теорема Шэвизье. Оси эллипса, описываемаго центромъ m чечевицы маятника Фуко относятся между собою какъ время полного обращенія по эллипсу ко времени полнаго вращенія эллипса.

положенные относительно оси y . Пусть r расстояние каждой из этих частиц от O , а угол MOy . Тогда:

$$v = r\omega$$

$$N = 2m\omega Qr \sin \alpha$$

По теоремѣ Кориолиса давленіе частицы M направлено въ сторону вращения ω , давленіе частицы M' направлено въ обратную сторону *). Эти давленія образуютъ пару $(N, -N)$, имѣющую моментъ:

$$2m\omega Qr^2 \sin^2 \alpha. \quad MM' = 4m\omega Qr^2 \sin^2 \alpha.$$

Пара эта стремится придвинуть ось вращения Ω къ оси вращения ω .

Опредѣлимъ давленія, оказываемыя симметричными между собою точками k и k' , расстоянія которыхъ отъ O тоже равны r , но соответственно перпендикулярны расстояніямъ отъ O точекъ M и M' . Эти давленія дадутъ другую пару

Складывая ее съ парой $(N, -N)$ получимъ пару, имѣющую моментъ:

$$4m\omega Qr^2 \sin^2 \alpha + 4m Q \omega r^2 \cos^2 \alpha = 4m\omega Qr^2.$$

Поэтому моментъ L пары, происходящей отъ давленій, оказываемыхъ всѣми частицами диска, будетъ:

$$L = 4\omega Q \Sigma mr^2.$$

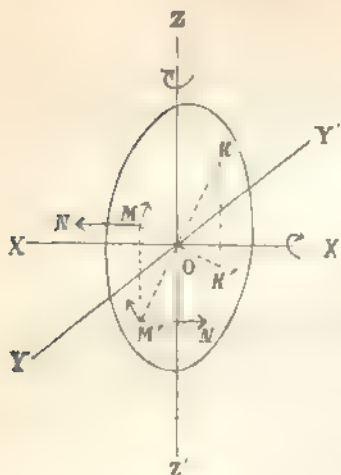
Еслибы мы имѣли не тонкій дискъ, а тѣло вращения около оси x , то пришлось бы суммировать полученную формулу для L на цѣлый рядъ дисковъ, и Σmr^2 былъ бы моментомъ инерціи относительно оси x .

Еслибы ось вращения ω составляла съ осью вращения Ω нѣкоторый уголъ β , то надо было бы разложить ω на вращение перпендикулярное къ Ω и на вращение совпадающее съ Ω . При этомъ L зависитъ только отъ перваго изъ этихъ составляющихъ вращеній, угловая скорость котораго $= \omega \sin \beta$. Поэтому въ этомъ случаѣ

$$L = 4\omega \sin \beta \cdot Q \Sigma mr^2.$$

Итакъ: Если какое-нибудь тѣло вращения вращается около своей оси со скоростью Ω и мы будемъ повертывать ось этого тѣла около нѣкоторой оси, образующей съ осью тѣла уголъ β , со скоростью ω , то явится

*) Согласно къ § 294-мъ точка давитъ на плоскость въ сторону противуположную вращенію плоскости, если удаляется отъ оси вращения, точка давитъ въ сторону вращенія плоскости, если приближается къ оси.



Фиг. 120

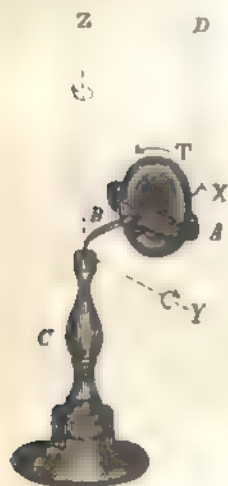
пара съ моментомъ $4 \omega \Omega \sin \frac{1}{2} \Sigma \sin^2$, стремящаяся повернуть ось *тыла* къ оси сообщаемого вращения ω такъ, чтобы, при совпадении осей, оба вращения ω и Ω совершались въ одну и ту же сторону.

Снаряды, обнаруживающие появленіе такой пары, называются гироскопами и совершаютъ движенія, кажущіяся на первый взглядъ весьма странными.

Наиболѣе замѣчательные изъ гироскоповъ — это гироскопы Фуко

1-ый гироскопъ Фуко

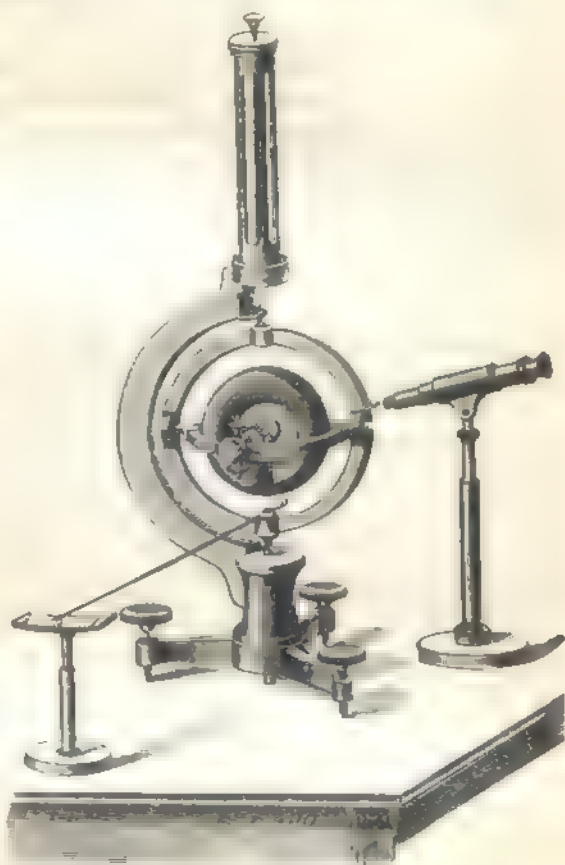
(фиг. 120а). Онъ состоитъ изъ тора *T*, ось котораго укрѣплена въ кольцо *A*, къ которому прикрѣпленъ штифтъ *B* съ остри-



Фиг. 120а.

емъ. Особымъ механизмомъ торъ приводится въ быстрое вращеніе Ω . Затѣмъ штифтъ *B* ставятъ остриемъ на твердую подставку *C*. Еслибы такъ

поставить гироскопъ при неподвижности тора, то онъ упалъ бы, но при скоромъ вращеніи тора онъ не падаетъ, а вращается около оси *z* все съ болѣею и болѣею скоростью и падаетъ только тогда, когда вращеніе тора значительно затихнетъ. Это явленіе объясняется такъ: начиная падать, гироскопъ начинаетъ вращаться около оси *oy*. Вслѣдствіе этого является пара *L*, сообщающая гироскопу вращеніе около оси *z*. Вслѣдствіе же этого вращенія является новая пара *L*, стремящаяся повернуть ось *ox* къ оси *oz*; эта именно пара и уравниваетъ тяжесть гироскопа.



Фиг. 121.

2-ой гироскопъ Фуко. Въ этомъ гироскопѣ (фиг. 121) внутреннее кольцо, несущее ось тора, подвѣшено на пружинахъ къ вѣшнему кольцу, подвѣшенному на нити, помѣщенной въ находящемся сверху цилиндрическомъ футлярѣ. Къ нижней части вѣшняго кольца придѣлано вертикальное острие, проходящее въ отверстіе подставки. Кроме того къ вѣшнему кольцу придѣлана горизонтальная стрѣлка, ходящая надъ дугою, снабженною дѣлениями. Съ этимъ гироскопомъ можно проводить три опыта.

Опытъ 1-ый. Приведа помощью особаго механизма торъ въ быстрое вращеніе, сохраняемъ полную свободу обоимъ колецъ. Ось тора будетъ сохранять свое абсолютное положеніе въ пространствѣ и, слѣдовательно, перемѣщаться по отношенію къ вращающейся землѣ.

Опытъ 2-ой. Опускаемъ нить и удерживаемъ вѣшнее кольцо въ плоскости перпендикулярной къ меридіану. Ось тора начнетъ двигаться и приметъ положеніе параллельное земной оси. Это объясняется такъ: все движеніе подставки, происходящее отъ движенія земли, можетъ быть разложено на нѣкоторое поступательное движеніе и на вращеніе около оси OS параллельной земной оси; отъ этого вращенія является пара L , стремящаяся соединить ось тора съ осью OS .

Опытъ 3-ий. Скрѣпляютъ между собой вѣшнее и внутреннее кольцо и поднимаютъ нить, уставляя внутреннее кольцо горизонтально. Замѣчаемъ, что вѣшнее кольцо становится перпендикулярно къ плоскости меридіана. Это объясняется такъ: плоскость меридіана проходитъ чрезъ прямую OS параллельную земной оси; если ось тора OX не лежитъ въ этой плоскости, то, стремясь приблизиться къ OS , она будетъ двигаться въ своей горизонтальной плоскости, пока не установится въ плоскости меридіана *).



*, Изложеніе теоріи гироскоповъ заимствовано изъ брошюры проф. Н. Е. Жуковскаго „Элементарная теорія гироскоповъ“ Отд. оттискъ изъ Вѣстн. Опыт. физ. и элем. матем. Киевъ, 1888.

ОТДѢЛЪ VI.

Теорія притяженія.

ГЛАВА I.

Общія формулы притяженія и притяженіе шаромъ

§ 306. Ньютоніанское притяженіе. Ньютонъ показалъ, что планеты движутся по своимъ орбитамъ подъ вліяніемъ притяженія къ солнцу (см. § 56). Онъ же высказалъ мысль, что законъ притяженія пропорціональнаго произведенію массъ и обратно пропорціональнаго квадратамъ разстоянія представляетъ собою мировой законъ, присущій всякимъ двумъ частицамъ матеріи. Притяженіе, совершающееся по этому закону, называется ньютоніанскимъ, и мысль Ньютона подтверждается всѣми наблюденіями. Весьма вѣроятно, что ньютоніанское притяженіе есть только результатъ дѣйствія среды, въ которой заключаются всѣ тѣла, именно эфира, но во всякомъ случаѣ дѣло происходитъ такъ, какъ бы всякія двѣ частицы матеріи притягивались взаимно по этому закону. Опредѣлимъ однако точнѣе, въ чемъ выражается законъ ньютоніанскаго притяженія.

Положимъ, что имѣются двѣ матеріальныя точки, находящіяся на разстояніи r одна отъ другой и имѣющія массы m и m' . Присутствіе каждой изъ этихъ точекъ вызываетъ появленіе силы, дѣйствующей на другую массу, причемъ обѣ силы, изъ которыхъ одна дѣйствуетъ на m , другая на m' , равны между собою. Обозначимъ абсолютную величину каждой изъ этихъ силъ чрезъ f . Обѣ эти силы направлены по r . сила f , дѣйствующая на m , направлена къ m' ; сила f , дѣйствующая на m' , направлена къ m . Законъ ньютоніанскаго притяженія выражается формулою:

$$f = C \frac{mm'}{r^2} \dots \dots \dots (738)$$

Если точка m свободна, то присутствіе массы m' вызываетъ въ движеніи точки m ускореніе

$$J = C \frac{m'}{r^2} \dots \dots \dots (739)$$

направленное къ m' .

Если точка m свободна, то присутствие точки m вызываетъ въ движеніи точки m' ускореніе

$$j_1 = C \frac{m}{r^2} \dots \dots \dots (740)$$

направленное къ m .

Изъ (739) и (740) слѣдуетъ уравненіе:

$$\frac{j}{j} = \frac{m'}{m} \dots \dots \dots (741)$$

показывающее, что *ускоренія двухъ точекъ, являющіяся вълѣдствіе ихъ взаимнаго ньютоновскаго притяженія, обратно пропорциональны ихъ массамъ.*

Если одна изъ точекъ не свободна, то присутствие другой заставляетъ первую производить давленіе равное f на препятствіе, мѣшающее первой точкѣ приобретать ускореніе, опредѣляемое одною изъ формулъ (731) или (740).

§ 307. Численное значеніе коэффиціента притяженія. Численное значеніе коэффиціента притяженія C въ формулѣ (738) зависитъ отъ выбора тѣхъ единицъ, которыми мы измѣряемъ массу, длину и силу.

Выберемъ единицу силы такъ, чтобы C равнялось единицѣ. Это весьма удобно для изслѣдованія притяженія, потому что тогда формула (738) приобретаетъ болѣе простой видъ:

$$f = \frac{mm'}{r^2} \dots \dots \dots (742)$$

Но такая единица силы оказывается уже вполне опредѣленною при данномъ выборѣ единицъ массы и длины. Дѣйствительно при $m = m' = 1$ и при $r = 1$ формула (742) даетъ $f = 1$. Слѣдовательно, при данномъ выборѣ единицъ массы и длины, мы уже *обязаны* принять за единицу силы такую силу, съ которой притягиваются *два* выбранныхъ единицы массы на единицу разстоянія одинъ отъ друга.

Та единица силы, которую приходится избрать для того, чтобы C равнялось 1, при томъ что граммъ, сантиметръ и секунда принимаются за единицы массы длины и времени, называется *астрономическою единицею силы*.

Посмотримъ, какъ велика астрономическая единица силы. Для этого выразимъ *всѣ* p массы граммъ у поверхности земли сперва въ динахъ, а потомъ въ астрономическихъ единицахъ силы. Мы видѣли въ § 14-мъ, что *всѣ* p одного грамма равенъ 981 динамъ.

$$p = 981 \text{ динамъ} \dots \dots \dots (743)$$

Съ другой стороны p равно силѣ, съ которой земля притягиваетъ одинъ граммъ, находящійся у ея поверхности.

Слѣдовательно, согласно съ (738):

$$p = C \frac{Mm}{R^2} \dots \dots \dots (744)$$

гдѣ R радіусъ земли, m масса одного грамма. Обозначимъ плотность земли чрезъ δ . Тогда:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$$

$$R = 637100000 = 6371 \cdot 10^5 \text{ сантиметровъ}$$

$$\delta = 5,67$$

$m = 1$ согласно предположенію, что за 1 массы принимаемъ массу граммъ.

Изъ (743) и (444) получаемъ:

$$C = \frac{981 R^2}{Mm} = \frac{3 \cdot 981 \cdot R^2}{4\pi R^3 \delta} = \frac{3 \cdot 981}{4\pi R \delta}.$$

Подставляя сюда приведенныя выше числа, получимъ.

$$C = \frac{1}{1543 \cdot 10^4} = \frac{1}{15430000}.$$

Итакъ C почти въ 15 милліоновъ разъ меньше одного дина, который почти равенъ одному миллиграмму. Другими словами: граммъ и граммъ, помѣщенные на разстояніи одного сантиметра притягиваются съ силою равною всего лишь одной 15-ти милліонной доли миллиграмма. Такъ какъ плотность δ опредѣлена еще не совершенно точно, то можно принять круглымъ числомъ:

$$C = \frac{1}{15000000} = \frac{1}{15 \cdot 10^6} \text{ дина} \dots \dots \dots (745)$$

Зная C , можемъ опредѣлять притяженіе (если за единицы примемъ сантиметръ, граммъ, дину) по формулѣ:

$$f = C \frac{mm_1}{r} = \frac{mm_1}{15 \cdot 10^6} \text{ дина} \dots \dots \dots (746)$$

Напримѣръ можемъ рѣшить такую задачу: съ какою силою притягиваются двѣ точки, находящіяся на разстояніи 10 сантиметровъ, если масса каждой точки равна одному килограмму.

По формулѣ (746) получимъ:

$$f = \frac{1000 \cdot 1000}{15000000 \cdot 100} = \frac{1}{1500} \text{ дина}.$$

Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ принимать за единицу силы не *дина*, а астрономическую единицу силы равную $\frac{1}{15000000}$ дина.

Тогда можно пользоваться простою формулою:

$$f = \frac{m \cdot m_1}{r^2} \dots \dots \dots (747)$$

Можно изслѣдовать притяженія, происходящія по другимъ законамъ, представляющіяся другими функціями разстоянія; но ньютоновское притяженіе особенно важно какъ мировой законъ, и какъ законъ, управляющій электрическими и магнитными явленіями.

§ 308. Общія формулы притяженія точки тѣломъ. До сихъ поръ мы рассматривали только взаимное притяженіе двухъ точекъ. Перейдемъ теперь къ изслѣдованію притяженія, оказываемаго на матеріальную точку m (фиг. 122) тѣломъ. Это притяженіе очевидно складывается изъ притяженій, оказываемыхъ на точку m всѣми элементами тѣла.

Обозначимъ чрезъ D плотность тѣла, то есть массу, содержащуюся въ единицѣ объема. Тогда масса безконечно малаго параллелепипеда, имѣющаго объемъ $dx\,dy\,dz$, будетъ:

$$D\,dx\,dy\,dz.$$

Пусть:

a, b, c координаты притягиваемой точки m ,

x, y, z координаты притягивающаго элемента.

Принимая за элементъ тѣла параллелепипедъ $dx\,dy\,dz$, видимъ, что оказываемое имъ на точку m притяженіе равно:

$$\frac{m \cdot D\,dx\,dy\,dz}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \quad (747)$$

Назовемъ чрезъ r разстояніе точки m отъ параллелепипеда $dx\,dy\,dz$. Тогда:

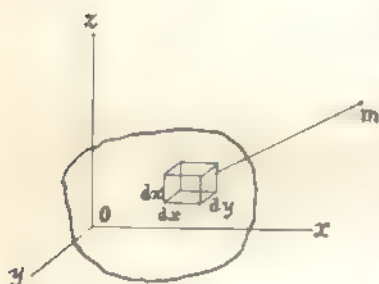
$$r = [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (748)$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ этимъ разстояніемъ съ осями координатъ сугъ:

$$\frac{(x-a)}{r}; \quad \frac{(y-b)}{r}; \quad \frac{(z-c)}{r} \quad (749)$$

Поэтому изъ (747) выводимъ слѣдующія проложенія X, Y, Z силы, съ которою элементъ $dx\,dy\,dz$ притягиваетъ точку m .

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{mD\,dx\,dy\,dz \cdot (x-a)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ Y &= \frac{mD\,dx\,dy\,dz \cdot (y-b)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ Z &= \frac{mD\,dx\,dy\,dz \cdot (z-c)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (750)$$



Фиг. 122.

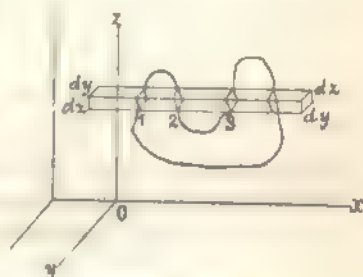
Для того, чтобы получить величины A, B, C положений на оси полного притяжения, оказываемого на точку m всѣмъ тѣломъ, нужно суммировать всѣ притяжения, оказываемыя всѣми элементами тѣла — нужно, иначе говоря, интегрировать тройными интегралами выражения (750), распространяя интеграцію на весь объемъ притягивающаго тѣла. Получимъ:

$$\left. \begin{aligned} A &= \iiint \frac{mD(x-a) dx dy dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ B &= \iiint \frac{mD(y-b) dx dy dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ C &= \iiint \frac{mD(z-c) dx dy dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots (751)$$

Если тѣло *однородно*, то есть плотность во всѣхъ его точкахъ одинакова, то одна изъ интеграцій каждаго трехкратнаго интеграла производится весьма просто, такъ какъ извѣстно, что:

$$\int \frac{(x-a) dx}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Представимъ себѣ даже такой сложный случай, когда тѣло имѣетъ видъ, изображенный на чертежѣ (фиг. 123); параллелепипедъ, имѣющій основание $dy dz$ и высоту параллельную оси x , пересѣкаетъ поверхность притягивающаго тѣла нѣсколько разъ, именно въ элементахъ: 1, 2, 3, 4 . . . Обозначимъ разстоянія этихъ элементовъ отъ притягиваемой точки чрезъ $r_1, r_2, r_3, r_4 \dots$



Фиг. 123.

Часть интеграла, относящаяся къ такому параллелепипеду, будетъ:

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} + \dots \right) dy dz \dots (752)$$

Пусть:

$d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3, d\sigma_4$ суть вырѣзываемые параллелепипедомъ элементы поверхности;

N_1, N_2, N_3, N_4 внѣшнія нормали въ этихъ элементахъ;

$(N_1, x), (N_2, x)$ углы наклоненія внѣшнихъ нормалей къ оси x .

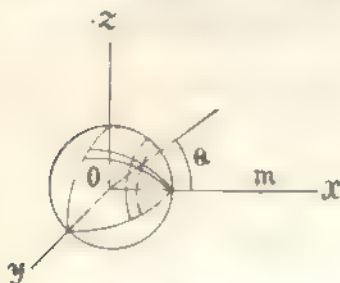
При такихъ обозначеніяхъ (752) принимаетъ видъ:

$$-\frac{d\sigma_1}{r_1} \cos(N_1, x) - \frac{d\sigma_2}{r_2} \cos(N_2, x) - \frac{d\sigma_3}{r_3} \cos(N_3, x) - \frac{d\sigma_4}{r_4} \cos(N_4, x) - \dots$$

Вслѣдствіе этого получимъ:

$$\begin{aligned} A &= -mD \int \int \frac{\cos(N, x)}{r} d\sigma \\ B &= -mD \int \int \frac{\cos(N, y)}{r} d\sigma \dots\dots\dots (753) \\ C &= -mD \int \int \frac{\cos(N, z)}{r} d\sigma \end{aligned}$$

§ 309. Притяженіе, оказываемое шаромъ на внѣшнюю точку. Приложимъ формулы предыдущаго параграфа къ вычисленію притяженія оказываемаго шаромъ радіуса R на точку m , находящуюся внѣ шара на разстояніи a отъ его центра.



Фиг. 124.

Примемъ прямую, соединяющую центр шара съ точкою m , за ось x и центр шара за начало координатъ. Благодаря симметріи шара относительно оси x (фиг. 124) слагающія притяженія B и C равны нулю. Остается опредѣлить только A .

Примемъ ось x за полярную ось. За элементъ $d\sigma$ поверхности шара можно принять весьма малый прямоугольникъ, ограниченный двумя сосѣдними меридианами и двумя сосѣдними параллелями.

Обозначимъ чрезъ θ уголъ, составляемый съ осью z радіусомъ, проведеннымъ въ этотъ элементъ. Примемъ плоскость (x, z) за плоскость перваго меридіана и обозначимъ долготу чрезъ ψ .

Одна сторона прямоугольнаго элемента равна дугѣ $Rd\psi$; другая его сторона есть дуга, описанная радіусомъ $R \sin \theta$ параллели, равная $R \sin \theta \cdot d\theta$. Слѣдовательно площадь элемента равна:

$$d\sigma = R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\psi \dots\dots\dots (754)$$

Не трудно видѣть, что $\cos(N, x) = \cos \theta$. Поэтому 1-ое изъ уравненій (753) приметъ видъ:

$$A = -mD \int \int \frac{R^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\psi \cdot \cos \theta}{r} \dots\dots\dots (755)$$

Здѣсь интеграція по θ должна быть произведена въ предѣлахъ отъ 0 до π ; интеграція по ψ —въ предѣлахъ отъ 0 до 2π , тогда поверхность сферы будетъ вся охвачена интегрированиемъ. Изъ фигуры видно, что:

$$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} \dots\dots\dots (756)$$

Вставляя въ (755), получимъ:

$$A = -Dm R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \cdot d\psi}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta}}$$

$$= -2\pi m D R^2 \int \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta}} \dots (757)$$

Интегрируя по частямъ, находимъ:

$$\int \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta}} = \frac{\cos \theta}{aR} \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta} + \\ + \frac{1}{aR} \int \sin \theta \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta} \cdot d\theta.$$

Слѣдовательно:

$$\int \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta}} = \frac{2R}{3a^2}.$$

Поэтому (757) дастъ:

$$A = \frac{4\pi R^2}{3} \cdot \frac{Dm}{a^2}.$$

Но $\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot D$ есть масса M шара. Слѣдовательно.

$$A = - \frac{Mm}{a^2} \dots \dots \dots (758)$$

Сравнивъ (758) съ (742) находимъ: шаръ притягиваетъ вѣшную точку такъ, какъ будто вся масса его была сосредоточена въ центрѣ.

§ 310. Притяженіе шаромъ внутренней точки. Если притягиваемая точка лежитъ внутри шара, то $a < R$; но разстояніе $\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta}$ всегда считается положительнымъ. Слѣдовательно въ этомъ случаѣ мы должны положить:

$$\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta} = R - a$$

но не $a - R$ какъ въ § 309. Поэтому теперь.

$$\int \frac{\sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \cdot \cos \theta}} = \frac{2a}{3R^2} \\ A = - \frac{4}{3} \pi Dma \dots \dots \dots (759)$$

Проведемъ чрезъ точку m внутреннюю сферу концентрическую съ даннымъ шаромъ. Объемъ этой сферы равенъ $\frac{4}{3} \pi a^3$; масса ея равна $\frac{4}{3} \pi a^3 D$. Назовемъ эту массу M' . Тогда (759) можно представить въ видѣ:

$$A = - \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 Dm}{a^2} = - \frac{M'm}{a^2}.$$

Итакъ:

$$A = - \frac{M m}{a^2} \dots \dots \dots (760)$$

Сравнивая (760) съ (742) заключаемъ: шаръ притягиваетъ точку m , расположенную внутри его, такъ, какъ будто бы въ центръ его была сосредоточена масса равная массѣ малата шара, заключеннаго въ сферу, проходящей чрезъ точку m .

Не трудно видѣть, что проложія на x и y координатъ притяженія шаромъ точки (x, y, z) будутъ:

$$- \frac{4}{3} \pi D m x; \quad - \frac{4}{3} \pi D m y; \quad - \frac{4}{3} \pi D m z.$$

§ 311. Притяженіе сферическимъ слоемъ точки, которую онъ окружаетъ. Положимъ, что точка m окружена слоемъ, заключеннымъ между сферическими концентрическими поверхностями радиусовъ R_2 и R_1 . Обозначимъ разстояніе точки m отъ центра слоя чрезъ r . Положимъ R_2 есть радиусъ вѣншей сферы.

Если бы весь шаръ радиуса R_2 притягивалъ точку m , то это притяженіе, согласно предыдущему параграфу, равнялось бы притяженію F , оказываемому на m шаромъ радиуса r .

Если бы только шаръ радиуса R_1 притягивалъ точку m , то и это притяженіе было бы равно притяженію F шаромъ радиуса r .

Но притяженіе слоемъ очевидно равно разности этихъ равныхъ между собою притяженій F и, потому, равно нулю.

Итакъ: сферическій слой не притягиваетъ окружающую имъ точку. Это теорема весьма важная въ теоріи электричества.

ГЛАВА II.

Теорія потенціала.

§ 312. Потенціалъ. Притяженіе удобнѣе изучается съ помощью особой функціи, называемой потенціаломъ.

Потенціалъ въ точкѣ a, b, c , есть не что иное, какъ потенціальная функція притяженій, оказываемыхъ даннымъ притягивающимъ тѣломъ, или системою притягивающихъ точекъ, на точку, имѣющую массу равную единицѣ и помещенную въ (a, b, c) .

Если притягивающія точки составляютъ сплошное тѣло, то потенціалъ V въ точкѣ (a, b, c) опредѣляется формулою:

$$V = \int \int \int \frac{dm}{r} \dots \dots \dots (761)$$

гдѣ m масса притягивающихъ элементовъ, r разстоянія ихъ отъ данной точки (a, b, c) .

Дѣйствительно (761) можно представить въ видѣ:

$$V = \iiint \frac{D \, dx \, dy \, dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \dots (762)$$

Здѣсь предѣлы интеграціи, распространяющіе ее на притягивающее тѣло не зависятъ отъ координатъ (a, b, c) притягиваемой точки. Поэтому для дифференцированія V по a, b, c достаточно дифференцировать подъ-интегральное выраженіе, при чемъ получится:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= \iiint \frac{D (x-a) \, dx \, dy \, dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial b} &= \iiint \frac{D (y-b) \, dx \, dy \, dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial V}{\partial c} &= \iiint \frac{D (z-c) \, dx \, dy \, dz}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \right\} \dots (763)$$

Сравнивъ (763) съ (751) и соображаясь съ тѣмъ, что мы положили массу притягиваемой точки равною единицѣ, получимъ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a} &= A \\ \frac{\partial V}{\partial b} &= B \\ \frac{\partial V}{\partial c} &= C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (764)$$

что и требовалось показать.

Не трудно видѣть, что въ томъ случаѣ, когда притягивающая система состоитъ изъ отдѣльныхъ точекъ m_1, m_2, m_3, \dots , находящихся отъ точки a, b, c въ разстояніяхъ r_1, r_2, r_3, \dots , потенциалъ въ (a, b, c) равенъ.

$$V = \sum \frac{m}{r} \dots \dots \dots (765)$$

Всякое направленіе s можно принять за одну изъ осей координатъ; поэтому слагающія притяженія по направленію s , оказываемого данною притягивающею системою на точку, имѣющую массу равную единицѣ, равна

$$\frac{\partial V}{\partial s} \dots \dots \dots (766)$$

Потенциалъ въ точкѣ (a, b, c) обуславливаемый данною притягивающею системою, есть, какъ мы видимъ, функція координатъ этой точки.

Присутствіе данной притягивающей системы обусловливаетъ въ каждой точкѣ пространства опредѣленный потенциалъ, будетъ ли въ этой точкѣ находиться притягиваемая масса или нѣтъ — безразлично. Положимъ, что притягивающая система дана и отнесена къ избраннымъ какимъ-нибудь осямъ координатъ. Если въ точкѣ (a, b, c) не имѣется даже никакой притягиваемой массы, то все-таки для этой точки существуетъ потенциалъ, просто какъ функція, опредѣляемая формулою (765) или формулою (761), смотря по тому, будетъ ли притягивающая система *дискретна* или *сплошная* (сплошное тѣло). Существованіе этого потенциала въ точкѣ a, b, c , показываетъ только, что *если бы* въ ней находилась масса, равная единицѣ, то проложенія A, B, C притягивающихъ силъ выражались бы производными отъ потенциала по формуламъ (764).

§ 313. Конкретное понятіе о потенциалѣ, какъ о работѣ. Положимъ, что масса, равная единицѣ, проходитъ путь ds подъ влияніемъ притягивающей системы. Согласно съ (766) проложеніе притяженія на этотъ путь равно $\frac{dV}{ds}$. Слѣдовательно, работа притягивающихъ силъ при такомъ перемѣщеніи притягиваемой точки равна

$$\frac{dV}{ds} ds. \quad (767)$$

Работа при перемѣщеніи изъ одного положенія въ другое, какъ мы знаемъ (§ 134), не зависитъ отъ того, по какому пути совершилось перемѣщеніе. Слѣдовательно, по какому бы пути притягиваемая точка ни переходила изъ 1-го положенія во 2-ое, расположенное какъ угодно далеко отъ 1-го, подъ влияніемъ притягивающей системы работа притяженій равна

$$\int \frac{dV}{ds} ds = \int dV = V_2 - V_1. \quad (768)$$

Въ безконечно удаленной точкѣ потенциалъ конечной притягивающей системы равенъ нулю, какъ это видно изъ (765), потому — что всѣ r равны безконечности въ этомъ случаѣ.

Слѣдовательно: для приближенія притягиваемой точки, имѣющей массу, равную единицѣ, изъ безконечности въ данную точку (a, b, c), подъ влияніемъ данной притягивающей системы, притягивающія силы оказываютъ, согласно (768), работу равную:

$$V.$$

потому что въ безконечности $V_1 = 0$; въ данной же точкѣ (a, b, c) мы полагаемъ $V_2 = V$. Итакъ:

Потенциалъ V въ точкѣ x, y, z равенъ работѣ, которую должны были бы произвести притягивающія силы данной притягивающей системы для того, чтобы приблизить массу, равную единицѣ, изъ безконечности въ эту точку (x, y, z).

Въ теоріи электричества и магнетизма приходится имѣть дѣло также

и съ отталкиваніями обратно пропорціональными квадрату разстоянія. Въ случаѣ отталкивательныхъ силъ:

Потенціалъ V въ точкѣ (x, y, z) равенъ работѣ, которую должны произвести отталкивательныя силы данной отталкивающей системы для того, чтобы удалить массу, равную единицѣ, изъ этой точки (x, y, z) въ безконечность.

§ 314. Сила въ данной точкѣ. Равнодѣйствующая всѣхъ силъ притяженія, оказываемыхъ данными массами на массу, равную единицѣ, помѣщенную въ данной точкѣ, называется *силою въ данной точкѣ*. Въ каждой точкѣ пространства равнодѣйствующая притяженій имѣетъ определенную величину и направление при данномъ расположении притягивающихъ массъ.

§ 315. Силовыя линіи. Кривая, касательная ко всѣмъ силамъ, существующимъ въ точкахъ, чрезъ которыя она проходитъ, называется *силовою линіею*.

Въ случаѣ притяженій, оказываемыхъ магнитомъ, *силовыя* линіи легко наблюдаются, положивъ на магнитъ бумагу, посыпанную желѣзными опилками: опилки располагаются по силовымъ линіямъ.

§ 316. Поверхности уровня. Геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ потенциалъ данной притягивающей системы одинаковъ, называется *поверхностью уровня или эквипотенциальною* поверхностью.

Потенціалъ V въ какой-нибудь точкѣ (x, y, z) , обусловливаемый данною притягивающею системою, какъ мы видѣли, есть въкоторая функция $F(x, y, z)$ координатъ этой точки (x, y, z) . По самому опредѣленію поверхности уровня потенциалъ V одинаковъ для всѣхъ ея точекъ. Слѣдовательно:

$$V = F(x, y, z) = \text{const} \dots \dots \dots (769)$$

есть уравненіе поверхности уровня.

Существованіемъ данной притягивающей системы обусловливается существованіе безконечнаго множества поверхностей уровня

$$V = c$$

$$V = c_2$$

$$V = c_3$$

$$\dots \dots$$

соотвѣтствующихъ различнымъ численнымъ значеніямъ $c_1, c_2, c_3 \dots$ потенциала.

Теорема: *Равнодѣйствующая притяженій въ какой-либо точкѣ поверхности уровня нормальна къ той поверхности.*

Доказательство.

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью къ поверхности уровня

$$V = \text{const}$$

съ осями координатъ, равны:

$$\cos(N, x) = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{X}{P}$$

$$\cos(N, y) = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{Y}{P}$$

$$\cos(N, z) = \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}} = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} = \frac{Z}{P}$$

гдѣ P есть равнодѣйствующая притяженій, X, Y, Z проложенія ея на ося координатъ.

Но извѣстно, что

$$\frac{X}{P} = \cos(P, x); \quad \frac{Y}{P} = \cos(P, y); \quad \frac{Z}{P} = \cos(P, z).$$

Слѣдовательно P и N составляютъ одинаковые углы съ осями, проходя чрезъ одну и ту же точку P направлена по N , что и требовалось доказать.

§ 317. **Случай одной притягивающей точки.** Если притягивающая система состоитъ только изъ одной притягивающей точки, имѣющей массу m , то поверхности уровня согласно съ (765) будутъ выражаться уравненіями:

$$V = \frac{m}{r} = \text{const.}$$

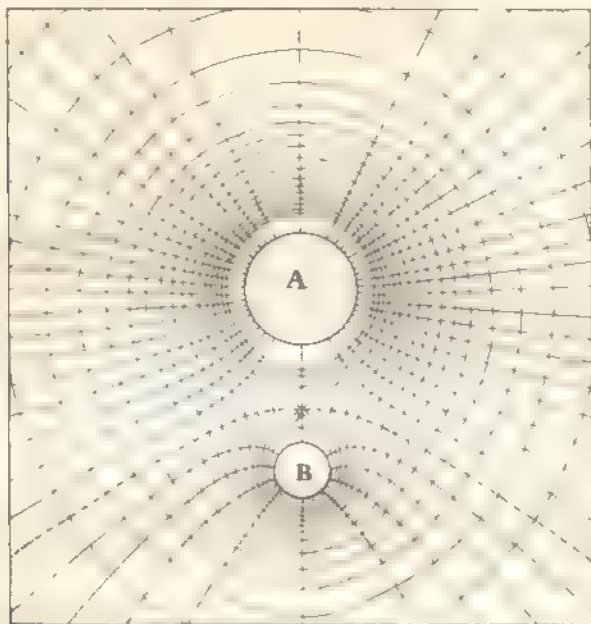
или

$$r = \text{const.}$$

Это сферы, описанныя изъ m какъ изъ центра. Силы направлены по радиусамъ такъ, что сѣтъ поверхностей уровня и силовыхъ линій въ этомъ простѣйшемъ случаѣ состоятъ изъ сѣты концентрическихъ сферъ и прямыхъ проходящихъ чрезъ m .

§ 318 **Случай двухъ притягивающихъ точекъ.** На чертежѣ (фиг. 125) представлены силовыя линіи лежащія въ плоскости чертежа и пересѣченія съ этою плоскостью поверхностей уровня въ томъ случаѣ когда притягивающая система состоитъ изъ двухъ точекъ, при чемъ масса одной изъ нихъ вчетверо болѣе массы другой. Здѣсь ближайшія къ притяги-

вающимъ точкамъ кривыя не начерчены; онѣ состоятъ изъ кривыхъ мало отличающихся отъ окружностей и изъ силовыхъ линій, идущихъ почти по

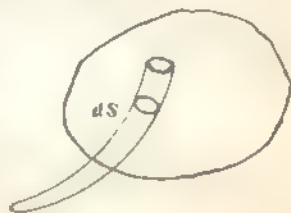


Фиг. 125.

радіусамъ. Въ каждой точкѣ чертежа сила направлена по касательной къ силовой линіи и нормально къ поверхности уровня. Такая сѣть отлично характеризуетъ расположение притяженій.

§ 319. **Силовые трубки.** Если вообразимъ себѣ элементъ поверхности уровня, ограниченный какимъ-нибудь контуромъ (фиг. 126) и проведемъ черезъ двѣ точки этого контура ds силовые линіи, то получимъ составленную изъ силовыхъ линій *силовую трубку*.

§ 320. **Силовой потокъ.** Если P есть равнодействующая притяженій въ элементѣ ds какой-нибудь поверхности, то произведение:



Фиг. 126.

$$P \, ds \cdot \cos(P, N) \dots \dots \dots (770)$$

Называется *силовымъ потокомъ, проходящимъ чрезъ элементъ ds , или индукціею чрезъ элементъ ds .*

Сумма всѣхъ силовыхъ потоковъ, проходящихъ чрезъ всѣ элементы какой-нибудь замкнутой поверхности, воображаемой въ присутствіи притягивающихъ массъ, называется *полнымъ силовымъ потокомъ, проходя-*

Следовательно (773) принимает вид:

$$\int \int P \cdot \cos (P, N) \, ds = \int \int X \, dy \, dz + \\ + \int \int Y \, dz \, dx + \int \int Z \, dx \, dy \quad . \quad . \quad (774)$$

Обозначимъ, какъ въ § 308 (фиг. 123), чрезъ 1, 2, 3, 4... точки пересѣченія прямой параллельной оси x съ поверхностью s . Тогда:

$$\int \int X \, dy \, dz = \int \int [(X_1 - X_2) + (X_2 - X_3) + \dots] \, dy \, dz \quad (775)$$

Если k какое-нибудь цѣлое число (одинъ изъ нашихъ индексовъ 1, 2, 3, 4...) и X конечно и непрерывно внутри объема ограниченной поверхностью s , то.

$$X_{k+1} - X_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\partial X}{\partial x} \, dx.$$

Поэтому (775) можно представить въ видѣ:

$$\int \int X \, dy \, dz = \int \int \int \frac{\partial X}{\partial x} \, dx \, dy \, dz$$

Точно такъ же можно преобразовать другіе интегралы правой части уравненія (774), которое, поэтому, приметъ видъ:

$$\int \int P \cdot \cos (P, N) \, ds = \int \int \int \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right] \, dx \, dy \, dz \quad (776)$$

Это равенство (776) и есть знаменитая формула Остроградскаго *). Она послужитъ намъ основаніемъ для вывода другихъ замѣчательныхъ формулъ.

§ 322. Теорема Лапласа. Пусть:

(ξ, η, ζ) координаты притягивающей точки m .

(x, y, z) координаты какой-нибудь точки пространства

r — разстояніе точки (x, y, z) отъ притягивающей точки m .

Дифференцируя известное равенство:

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (777)$$

получимъ:

$$r \frac{dr}{dx} = x - \xi.$$

Потенціалъ V_1 , обусловливаемый точкою m въ точкѣ (x, y, z) , согласно съ 765 равенъ:

$$V_1 = \frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}$$

*) Запис. С.-Петерб. Акад. Наукъ т. I, стр. 39, 1828 г.

Поэтому:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial x} &= -m \frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial y} &= -m \frac{y}{r^3} \\ \frac{\partial V_1}{\partial z} &= -m \frac{z}{r^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (778)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} &= -\frac{m}{r^3} + \frac{3m(x-\xi)^2}{r^5} \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} &= -\frac{m}{r^3} + \frac{3m(y-\eta)^2}{r^5} \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} &= -\frac{m}{r^3} + \frac{3m(z-\zeta)^2}{r^5} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (779)$$

Складывая эти три уравнения (779) и сообразуясь съ (777), получимъ

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (780)$$

Если имѣемъ дѣло не съ одною только притягивающею точкою m , а съ цѣлою системою притягивающихъ точекъ, то согласно (769), потенциалъ V системы равенъ суммѣ потенциаловъ, обусловливаемыхъ отдельными притягивающими массами. Поэтому для притягивающей системы согласно съ (780), получимъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \dots \dots \dots (781)$$

Это и есть знаменитое уравненіе Лапласа.

Замѣтимъ, что нашъ выводъ былъ бы не вѣренъ, еслибы одна изъ притягивающихъ точекъ совпадала съ рассматриваемою точкою (x, y, z) пространства, потому что тогда соответствующій потенциалъ V_1^m былъ бы безконечно великъ, благодаря тому, что тогда r былъ бы нулемъ.

Поэтому уравненіе Лапласа вѣрно только для точки (x, y, z) не совпадающей ни съ одною притягивающею точкою. Если притягивающая система есть сплошное тѣло, то уравненіе Лапласа вѣрно, слѣдовательно, только для *внѣшнихъ* точекъ, лежащихъ *внѣ* тѣла. Потенціалъ въ точкѣ лежащей *внѣ* тѣла, называется *внѣшнимъ* (*exterieur*) и обозначается значкомъ e .

V_e = *внѣшній* потенциалъ.

Формула Лапласа можетъ быть выражена, слѣдовательно, такъ:

Теорема Лапласа: *сумма вторыхъ производныхъ внѣшнего потенциала по координатамъ равна нулю.*

Уравнение Лапласа (781) столь важно, что функций, ему удовлетворяющих, получили особое название *сферических функций*, и учение о сферических функциях представляет собою особый отдѣлъ математики, имѣющий весьма обширную литературу.

Сумма вторыхъ производныхъ, стоящая въ лѣвой части уравнения Лапласа (781), обозначается знакомъ $\nabla^2 V$, такъ что:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V$$

и теорема Лапласа, выражаемая формулою (781), можетъ быть выражена формулою:

$$\nabla^2 V_i = 0 \dots \dots \dots (782)$$

§ 323. Теорема Пуассона. Перейдемъ теперь къ изслѣдованію того случая, когда разсматриваемая точка (x, y, z) пространства лежитъ внутри притягивающаго тѣла. Пусть, ρ есть плотность той точки притягивающаго тѣла, съ которою совпадаетъ точка (x, y, z) .

Опишемъ около точки (x, y, z) изъ весьма близкаго къ ней центра (a, b, c) сферу настолько малую, чтобы можно было считать плотность внутри этой сферы повсюду одинаковою. Пусть:

V_1 — потенциалъ, обусловливаемый въ точкѣ (x, y, z) всѣмъ тѣломъ,

V_1 — потенциалъ, обусловливаемый въ (x, y, z) массою, содержащеюся внутри описанной маленькой сферы,

V_2 — потенциалъ, обусловливаемый въ (x, y, z) остальною частью тѣла.

Тогда

$$V_i = V_1 + V_2.$$

Слѣдовательно:

$$\nabla^2 V_i = \nabla^2 V_1 + \nabla^2 V_2.$$

Но по теоремѣ Лапласа $\nabla^2 V_i = 0$. Слѣдовательно:

$$\nabla^2 V_1 = -\nabla^2 V_2 = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}$$

или

$$\nabla^2 V_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z}, \dots \dots \dots (783)$$

гдѣ X_1, Y_1, Z_1 суть проложенія притяженія маленькою сферою точки (x, y, z) внутри ея находящейся и имѣющей массу равную единицѣ.

Припоминая формулы, приведенныя въ концѣ § 310, находимъ:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{4}{3} \pi (x - a) \cdot \rho \\ Y_1 &= -\frac{4}{3} \pi (y - b) \cdot \rho \\ Z_1 &= -\frac{4}{3} \pi (z - c) \cdot \rho \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (784)$$

Вставляя эти величины въ (784), находимъ

$$\nabla^2 V_i = -4\pi\rho \dots \dots \dots (785)$$

или

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial z^2} = -4\pi\rho \dots \dots \dots (786)$$

Это и есть формула Пуассона, въ которой ρ плотность тѣла въ разсматриваемой внутренней точкѣ (x, y, z) ; V_i внутреннй потенциалъ отмѣчаемый индексомъ i (interieur). Формула Пуассона можетъ быть выражена такъ:

Теорема Пуассона: *сумма вторыхъ производныхъ внутренняго потенциала по координатамъ равна $-4\pi\rho$*

§ 324. Теорема Гаусса. Прилагая формулу (Остроградскаго (776) къ такому вектору, проложеннаго котораго имѣетъ потенциалъ V , получимъ

$$\iint P \cdot \cos(P, N) ds = \iiint \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz \quad (787)$$

Положимъ, что ABC есть воображаемая замкнутая поверхность, проведенная вблизи притягивающихъ массъ такъ, что нѣкоторыя изъ этихъ массъ частью или вполнѣ ею объемлются, а другія находятся внѣ ея. Докажемъ слѣдующую теорему.

Теорема Гаусса: *Полный силовой потокъ, проходящй чрезъ воображаемую замкнутую поверхность, равенъ произведению $+4\pi M$ массы M , заключенной внутри этой поверхности на 4π .*

Доказательство: Прилагая къ воображаемой замкнутой поверхности s формулу (787) и теоремы Лапласа и Пуассона находимъ.

$$\iint P \cdot \cos(P, N) ds = \iiint [-4\pi\rho] dx dy dz = 4\pi M \dots \dots \dots (788)$$

что и требовалось доказать.

§ 325. Формулы Грина. Необыкновенно много приложений къ различнымъ отдѣламъ математики и физики получали знаменитыя формулы Грина.

Докажемъ слѣдующее: если двѣ функции V и V' отъ (x, y, z) , равно какъ и ихъ первыя производныя, конечны, однозначны и непрерывны внутри нѣкотораго объема, ограниченнаго замкнутою поверхностью s , то онѣ связаны между собою слѣдующими двумя формулами:

$$\begin{aligned} \iint V \frac{dV'}{dn} ds - \iint \int V \left[\frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \\ \iint \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V'}{\partial z} \right] dx dy dz \dots \dots \dots (789) \end{aligned}$$

$$\int \int V \frac{dV}{dn} ds = \int \int \int V \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz = \\ \int \int \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz. \quad (790)$$

Доказательство. Положимъ:

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = X; \quad V \frac{\partial V}{\partial y} = Y; \quad V \frac{\partial V}{\partial z} = Z. \quad (791)$$

гдѣ X, Y, Z суть продолженія какого-нибудь вектора P . Пусть α, β, γ косинусы угловъ, составляемыхъ *внешнею* нормалью и съ осями, E уголъ, составляемый P съ n .

Тогда

$$-P \cos E = V \left[\alpha \frac{\partial V}{\partial x} + \beta \frac{\partial V}{\partial y} + \gamma \frac{\partial V}{\partial z} \right] = V \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (792)$$

Изъ (791) имѣемъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = V \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] + \\ + \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right]. \quad (793)$$

Вставляя (792) и (793) въ формулу (776) Остроградскаго, получимъ,

$$\int \int V \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int \int \int V \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] dx dy dz + \\ + \int \int \int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx dy dz.$$

Изъ этого уравненія, простою перестановкою членовъ, получается формула (789) Грина.

Полагая, вмѣсто (791), такія равенства:

$$V \frac{\partial V}{\partial x} = X; \quad V \frac{\partial V}{\partial y} = Y; \quad V \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

получимъ, такимъ же путемъ, формулу (790) Грина.

Вычтя (790) изъ (789) получимъ третью формулу Грина, вытекающую изъ первыхъ двухъ:

$$\int \int V \frac{\partial V}{\partial n} ds = \int \int V \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int \int \int V \left[\nabla^2 (V) \right] dx dy dz = \\ = - \int \int \int V \left[\nabla^2 (V) \right] dx dy dz. \quad (794)$$

Итакъ, изъ формулы Остроградскаго мы вывели три формулы (789), (790) и (794). Грина. Последнюю изъ нихъ (794) можно представить въ болѣе удобномъ видѣ слѣдующимъ образомъ:

Возьмемъ такія двѣ функции ρ и ρ' , которыя опредѣлялись бы равенствами:

$$-4\pi\rho = \nabla^2(V); \quad -4\pi\rho' = \nabla^2(V') \quad \dots \quad (795)$$

Тогда формула (794) можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\iint V \frac{\partial V'}{\partial n} ds - \iint V' \frac{\partial V}{\partial n} ds \\ - 4\pi \iiint (V\rho' - V'\rho) dx dy dz \quad \dots \quad (796)$$

Эту последнюю формулу мы и будемъ чаще всего примѣнять, помня что въ ней ρ и ρ' опредѣляются уравненіями (795), въ которыхъ по теоремамъ Лапласа (781) и Пуассона (786) функции ρ и ρ' могутъ быть разсматриваемы какъ плотности тѣхъ точекъ, въ которыхъ V или V' разсматривается какъ потенциалъ, обусловливаемый притягивающими массами.

Формулы (789) (790) и (794) имѣютъ общее аналитическое значеніе. Формула (796) особенно удобна въ теории потенциала.

Перейдемъ къ разсмотрѣнію важнѣйшихъ приложений формулъ Грина.

§ 326. Теорема Грина объ эквивалентномъ слѣдѣ на какой-либо замкнутой поверхности. Приложимъ формулу (796) Грина къ слѣдующему частному случаю весьма важному въ электростатикѣ (фиг. 127).



Фиг. 127.

Дана замкнутая поверхность s , на которую и будемъ распространять интегралы лѣвой части формулы (796), а интегралы правой части будемъ распространять на объемъ, ограниченный этою поверхностью s . Положимъ, что внутри этого объема находятся притягивающія точки m_1, m_2, m_3, \dots , и разсматривается потенциалъ, обусловливаемый этими массами въ точкѣ A , лежащей *вне* объема, ограниченного поверхностью s .

Пусть:

V — потенциалъ, обусловливаемый массами m_1, m_2, m_3, \dots въ какой-либо точкѣ пространства.

r — разстоянія какой-либо точки пространства отъ A .

$$V' = \frac{1}{r}.$$

Въ точкѣ A не находится никакой массы, такъ что для всякихъ массъ она *внѣшняя*. По этому $\frac{1}{r}$, согласно съ § 332-мъ, удовлетворяетъ

уравнению Лапласа, и потому, на основаніи (795) и нашего положенія $V' = \frac{1}{r'}$, заключаемъ, что

$$\rho' = 0.$$

Слѣдовательно, въ настоящемъ случаѣ (796) принимаетъ видъ:

$$\iint \left[V \cdot \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r'} \right) - \frac{1}{r'} \cdot \frac{dV}{dn} \right] ds = 4\pi \iiint \frac{\rho \, dx \, dy \, dz}{r'} \quad (797)$$

или

$$- \iint \frac{d(V \cdot r)}{dn} \frac{ds}{r'^2} = 4\pi \iiint \frac{\rho \, dx \, dy \, dz}{r'} \quad (798)$$

Здѣсь тройной интегралъ правой части распространяется на весь объемъ, заключенный въ s . Тѣ элементы этого объема, въ которыхъ нѣтъ никакихъ притягивающихъ массъ, дадутъ $\rho = 0$. Но тѣ элементы объема, въ которыхъ находятся притягивающія массы m_1, m_2, m_3, \dots дадутъ для ρ конечныя значенія равныя плотности этихъ элементовъ; а такъ какъ объемы этихъ элементовъ равны $dx \, dy \, dz$, то

$$\rho \, dx \, dy \, dz = m$$

и тройной интегралъ правой части уравненія (798), согласно съ (761), равенъ потенціалу, обусловленному въ точкѣ A массами m_1, m_2, m_3, \dots . Обозначимъ этотъ интересующій насъ потенціалъ чрезъ V_A . Тогда (798) приметъ видъ:

$$- \iint \frac{d(V \cdot r)}{dn} \frac{ds}{r'^2} = 4\pi \cdot V_A \quad (799)$$

Наложимъ на поверхность s безконечно-тонкій слой притягивающей матеріи и распредѣлимъ его плотность ρ , такъ, чтобы она въ каждой точкѣ поверхности s удовлетворяла уравненію:

$$-\rho = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r'} \cdot \frac{d(V \cdot r')}{dn} \quad (800)$$

Опредѣливъ изъ (799) величину $\frac{1}{r'} \cdot \frac{d(V \cdot r')}{dn}$ и подставивъ ее въ (798) получимъ

$$\iint \frac{\rho \cdot ds}{r'} = V_A \quad (801)$$

Но ρ есть плотность слоя, расположеннаго на s . Слѣдовательно $\rho \cdot ds$ есть масса элемента слоя, тогда какъ r' есть разстояніе отъ A точекъ, разсматриваемыхъ въ интегралѣ лѣвой части уравненія (801), то есть именно точекъ поверхности s . Поэтому лѣвая часть уравненія (801), согласно съ (761), есть потенціалъ, обуславливаемый въ точкѣ A слоемъ. Такимъ образомъ (801) можно представить въ видѣ:

потенціалъ, въ A , слоя = потенціалу, въ A , массъ m_1, m_2, m_3, \dots

Отсюда:

1-ая теорема Грина. *Всегда можно распределить притягивающее вещество на данной воображаемой замкнутой поверхности в таком бесконечно тонком слое, который будет притягивать внешнюю точку A так, как ее притягивают данные массы m_1, m_2, m_3, \dots , находящиеся внутри объема, ограниченного этой замкнутой поверхностью s . Закон распределения плотности такого слоя по поверхности s выражается формулою (800), а слой называется эквивалентным по отношению къ данным массам m_1, m_2, m_3, \dots .*

§ 327. Тѣлесный уголъ. Вырѣжемъ на сферѣ, описанной радиусомъ равнымъ единицѣ, бесконечно малый элементъ ds , ограниченный какимъ-нибудь замкнутымъ контуромъ и проведемъ изъ центра сферы ко всѣмъ точкамъ этого контура радиусы. Получимъ бесконечно тонкій конусъ. Если опишемъ изъ того же центра рядъ концентрическихъ сферъ, то упомянутый конусъ вырѣжетъ на нихъ элементы пропорциональные квадратамъ радиусовъ, подобно тому какъ центральный уголъ отсѣкаетъ на концентрическихъ окружностяхъ дуги пропорциональныя радиусамъ. Величину

дуга
радиусъ

измѣняется, какъ извѣстно, обыкновенный (плоскій) уголъ. Величину

$$\frac{\text{сферическій элементъ}}{(\text{радиусъ})^2} = \text{тѣлесный уголъ} \dots (802)$$

измѣняется *тѣлесный уголъ*.

Поэтому: числовая величина плоскаго угла равна, какъ извѣстно, числовой величинѣ дуги, описанной радиусомъ равнымъ единицѣ; точно также числовая величина тѣлеснаго угла равна числовой величинѣ площади элемента, вырѣзаемаго конусомъ на поверхности сферы равной единицѣ.

Положимъ, что изъ какой-нибудь точки A описанъ бесконечно тонкій конусъ, вырѣзающий на данной поверхности s элементъ ds , наклоненный подъ угломъ φ къ элементу сферы, проходящей чрезъ него и описанной изъ точки A . Площадь этого элемента сферы равна

$$ds \cdot \cos \varphi.$$

Если r есть радиусъ-векторъ, проведенный изъ точки A въ элементъ ds , то, согласно съ (802), тѣлесный уголъ $d\omega$ конуса, имѣющаго вершину въ A и вырѣзающаго элементъ ds , опредѣлится формулою

$$d\omega = \frac{ds \cos \varphi}{r^2} \dots (803)$$

Но по теоремѣ о равенствѣ угловъ, имѣющихъ взаимноперпендикулярныя стороны, уголъ φ равенъ углу, составляемому нормалью n съ радиусомъ-

вектором r . Поэтому

$$\cos \varphi = \frac{dr}{dn} \cdot \dots \dots \dots (804)$$

Изъ (803) и (804) имѣемъ:

$$d\omega = \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \cdot \dots \dots \dots (805)$$

Для послѣдующаго намъ интересно знать, что представляетъ собой

$$\iint d\omega = \iint \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \cdot \dots \dots (806)$$

распространенный на замкнутую поверхность s .

Если точка A внутренняя (находится внутри объема, ограниченного поверхностью s), то сумма всѣхъ безконечно малыхъ элементовъ $d\omega$, вырѣзаемыхъ на сферѣ описанной изъ A радиусомъ, равнымъ единицѣ, равна поверхности этой сферы, то есть 4π . Если точка A вѣшняя (находится внѣ объема, ограниченного поверхностью s), то при суммировании всѣхъ $d\omega$, сперва тѣлесный уголъ будетъ все увеличиваться до тѣхъ поръ, пока конусъ не сдѣлается касательнымъ къ поверхности s . Затѣмъ тѣлесный уголъ будетъ уменьшаться и доидеть до нуля.

Итакъ:

$$\iint d\omega = 4\pi \text{ для внутренней точки} = \iint \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \cdot \dots (807)$$

$$\iint d\omega = 0 \text{ для вѣшной точки} = \iint \frac{ds}{r^2} \cdot \frac{dr}{dn} \cdot \dots (808)$$

§ 338. Теорема Грина объ эквивалентномъ слоѣ, лежащемъ на поверхности уровня. Рассмотримъ задачу параграфа 326-го въ томъ случаѣ, когда s есть одна изъ поверхностей уровня для притяженія, оказываемыхъ массами m_1, m_2, m_3, \dots

Въ этомъ случаѣ точно также получимъ уравненіе (797) и точно такъ же докажемъ, что правая часть его равна $(4\pi)V_A$. Лѣвую часть уравненія (797) представимъ теперь въ видѣ двухъ отдѣльныхъ интеграловъ, такъ что оно приметъ видъ:

$$\iint V \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right) ds = \iint \frac{1}{r} \cdot \frac{dV}{dn} \cdot ds = 4\pi V_A.$$

Здѣсь первый двойной интегралъ лѣвой части распространенъ на всю поверхность s . Но если s есть поверхность уровня, то во всѣхъ ея точкахъ потенциалъ V , обуславливаемый массами m_1, m_2, m_3, \dots , имѣетъ, согласно съ § 316-мъ, одну и ту же величину, обозначимъ ее чрезъ V_A . Она должна быть разсматриваема, слѣдовательно, какъ постоянная въ

первомъ двойномъ интегралѣ лѣвой части, и можетъ быть вынесена за знакъ интеграла. Поэтому получимъ:

$$V_A \int \int \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r'} \right) \cdot ds - \int \int \frac{1}{r} \cdot \frac{dV_A}{dn} ds = 4\pi V_A \dots (809)$$

Но

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r'} \right) \cdot ds = - \frac{1}{r'^2} \cdot \frac{dr'}{dn} \cdot ds$$

Слѣдовательно (809) приметъ видъ:

$$- V_A \int \int \frac{1}{r'^2} \cdot \frac{dr'}{dn} \cdot ds - \int \int \frac{1}{r} \cdot \frac{dV_A}{dn} ds = 4\pi V_A \dots (810)$$

Согласно съ (808) первый членъ этого уравненія (810) равенъ нулю
Слѣдовательно:

$$\int \int \frac{1}{r} \cdot \frac{dV_A}{dn} ds = - 4\pi \cdot V_A \dots (811)$$

Наложимъ на поверхность s безконечно тонкій слой притягивающаго вещества и распредѣлимъ его плотность ρ такъ, чтобы въ каждой точкѣ поверхности s она удовлетворяла уравненію

$$\bar{\rho} = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV_A}{dn} \dots (812)$$

Опредѣлимъ изъ (812) величину $\frac{dV_A}{dn}$ и подставимъ въ (811). Получимъ:

$$\int \int \frac{\rho ds}{r} = V_A \dots (813)$$

Но ρ есть плотность слоя, расположеннаго на s . Слѣдовательно ρds есть масса элемента слоя, тогда какъ r' разстояніе отъ A точекъ, рассматриваемыхъ въ интегралѣ лѣвой части уравненія (813), то есть именно точекъ поверхности s . Поэтому лѣвая часть уравненія (813), согласно съ (761), есть потенциалъ, обусловливаемый въ точкѣ A слоемъ. Такимъ образомъ (813) можно представить въ видѣ:

потенціалъ, въ A , слоя $=$ потенциалу, въ A , массы m_1, m_2, m_3, \dots

Отсюда:

2-ая теорема Грина. *Всегда можно распределить притягивающее вещество на замкнутой поверхности уровня s такимъ безконечно тонкимъ слоемъ, который будетъ притягивать внѣшнюю точку A такъ, какъ ее притягиваютъ данныя массы m_1, m_2, m_3, \dots , находящіяся внутри объема ограниченнаго этой поверхностью s . Законъ распределения плотности такого слоя по поверхности уровня выражается формулою*

$$\rho = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV_A}{dn}$$

Здѣсь чрезъ n обозначена *нормальная* нормаль, согласно съ § 325-мъ.

Согласно § 316 сила притяжения P направлена по внутренней нормали и по теоріи потенциала

$$P = \frac{dV}{dn} \dots \dots \dots (814)$$

въ каждой точкѣ поверхности уровня. Следовательно, согласно съ (812):

$$4\pi r = P \dots \dots \dots (815)$$

Эта теорема Грина вмѣстѣ съ формулою (815) имѣетъ огромное значеніе въ электростатикѣ, давая возможность по силѣ P опредѣлять напряженіе ρ электричества въ любой точкѣ поверхности s кондуктора, пользуясь уравненіемъ (815), такъ какъ поверхность хорошаго проводника есть одна изъ поверхностей уровня оказываемыхъ имъ электрическихъ притяженій.

Столь полезная въ электростатикѣ теорема представляетъ собою лишь весьма частный случай общей формулы Грина (796), и это только еще малая часть той пользы, которую физикъ извлекаетъ изъ общей формулы (796). Поэтому перейдемъ къ выясненію конкретнаго значенія общей формулы (796) по крайней мѣрѣ въ теоріи потенциала. Для этого ознакомимся предварительно съ понятіемъ о взаимномъ потенциалѣ двухъ системъ.

§ 339. **Взаимный потенциалъ двухъ системъ.** Положимъ, что подъ влияніемъ притягивающихъ силъ материальная точка массы m' передвигается, по какому бы то ни было пути, изъ того положенія, въ которомъ потенциалъ притягивающихъ ее силъ равенъ нулю, въ данное положеніе B_1 . Работа притягивающихъ силъ, согласно съ § 313-мъ, равна при этомъ

$$V_1 m',$$

если V_1 есть потенциалъ, обусловливаемый въ B_1 притягивающими силами. Если другая точка m_2 передвигается подъ влияніемъ тѣхъ же силъ изъ положенія, въ которомъ обусловливаемый ими потенциалъ равенъ нулю въ данное положеніе B_2 , то силы оказываютъ еще работу

$$V_2' m_2,$$

если V_2 есть потенциалъ, обусловливаемый ими въ B_2 .

Обобщимъ это разсужденіе. Положимъ, что имѣемъ двѣ системы материальныхъ точекъ: точки $m_1, m_2, m_3 \dots$ первой системы находятся въ положеніяхъ $A_1, A_2, A_3 \dots$; точки $m'_1, m'_2, m'_3 \dots$ второй системы находятся въ положеніяхъ $B_1, B_2, B_3 \dots$. Пусть:

$V_1, V_2, V_3 \dots$ суть потенциалы, обусловливаемые въ точкахъ $B_1, B_2, B_3 \dots$ первой системой;

$V'_1, V'_2, V'_3 \dots$ суть потенциалы, обусловливаемые въ точкахъ $A_1, A_2, A_3 \dots$ второй системой.

Положимъ, что каждая точка одной системы дѣйствуетъ на точки другой системы, но не дѣйствуетъ на точки своей системы. Работа W , производимая притягивающими силами первой системы для перемѣщенія точекъ второй системы изъ положеній, въ которыхъ потенциалъ равенъ нулю, въ положенія $B_1, B_2, B_3 \dots$ равна

$$W = V_1 m'_1 + V_2 m'_2 + V_3 m'_3 + \dots \quad (816)$$

Работа, производимая притягивающими силами второй системы для перемѣщенія точекъ первой системы изъ положеній, въ которыхъ потенциалъ равенъ нулю, въ положенія $A_1, A_2, A_3 \dots$ равна

$$W' = V'_1 m_1 + V'_2 m_2 + V'_3 m_3 + \dots \quad (817)$$

Пусть:

r_{11} = разстояніе между m , и m'_1 ,

r_{21} = разстояніе между m , и m'_2

.....

Тогда:

$$V_1 = \frac{m}{r_{11}} + \frac{m}{r_{21}} + \frac{m}{r_{31}} + \dots \quad (818)$$

$$V' = \frac{m'}{r_{11}} + \frac{m'}{r_{12}} + \frac{m'}{r_{13}} + \dots \quad (819)$$

Подставляя эти величины (818) и (817), находимъ

$$W = \frac{m_1 m'_1}{r_{11}} + \frac{m_1 m'_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m'_3}{r_{13}} + \dots = \sum \frac{mm'}{r} \quad (820)$$

$$W' = \frac{m_1 m'_1}{r_{11}} + \frac{m_2 m'_1}{r_{12}} + \frac{m_3 m'_1}{r_{13}} + \dots = \sum \frac{mm'}{r} \quad (821)$$

Поэтому:

$$W' = W \quad (822)$$

Эта величина:

$$W' = W = \sum \frac{mm'}{r} \quad (823)$$

называется *взаимнымъ потенциаломъ* двухъ системъ или *взаимной работой*.

Если каждая изъ системъ представляетъ собою сплошное тѣло, то формула (823) можетъ быть представлена въ видѣ.

$$W = W' = \iiint V \rho' dv' \quad \iiint V' \rho dv \quad (824)$$

гдѣ V — есть потенциалъ обусловливаемый первымъ тѣломъ,

ρ' — плотность второго тѣла,

dv' — объемъ элемента второго тѣла, такъ что

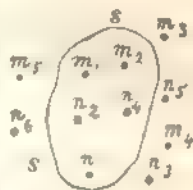
$\rho' dv'$ = масса элемента второго тѣла.

§ 330 Формула Грина выраженная помощью взаимных потенціаловъ.
(Обратимся теперь къ третьей формулѣ Грина (796):

$$\int \int V \frac{dV'}{dn} ds - \int \int V' \frac{dV}{dn} ds = \\ = 4\pi \int \int \int [V\rho - V'\rho'] dx dy dz \dots \dots (796)$$

Представимъ себѣ двѣ системы матеріальныхъ точекъ (фиг. 128) и замкнутую поверхность S , охватывающую часть 1-й и часть 2-й системы. Распространимъ интегралы лѣвой части уравненія (796) на эту поверхность S , интегралъ же правой части на объемъ, ограниченный поверхностью S . Пусть:

- V — потенциалъ обусловливаемый 1-ю системою,
- V' — потенциалъ, обусловливаемый 2-ю системою,
- ρ и ρ' — плотности,
- n — вѣйшая нормаль поверхности S .



Фиг. 128

Припомнимъ, что формула (796) выводена была при условіяхъ (795) и что, на основаніи теоремы Лапласа, $\Delta^2(V)$ для вѣйшихъ точекъ равенъ нулю.

Уравненіе (796) можетъ быть представлено, согласно съ (824), и съ § 316 въ видѣ:

$$\int \int [VP - V'P] ds = 4\pi [W_1 - W'_1] \dots \dots (825)$$

- гдѣ: W_1 — взаимный потенціалъ 1-ой системы и внутреннихъ точекъ 2-ой системы,
- W'_1 — взаимный потенціалъ 2-ой системы и внутреннихъ точекъ 1-ой системы,
- P — сила притяженія оказываемая на 1 массы въ ds первую системою,
- P' — сила притяженія, оказываемая на 1 массы въ ds вторую системою.

ОТДѢЛЪ VII.

Равновѣсіе гибкой нити.

ГЛАВА I.

Равновѣсіе свободной нити.

§ 331. *Цѣпная линія.* Представимъ себѣ тонкую тяжелую совершенно гибкую нить, то есть такую нить, которая подчиняется дѣйствию тяжести и въ поперечныхъ сѣченіяхъ которой проявляются только натяженія направленные по касательной къ нити. Нить предполагается настолько тонкою, чтобы можно было разсматривать ее какъ кривую и говорить о ея касательной, плоскости соприкосновенія и проч.

Кривая, по которой такая однородная нить располагается въ вертикальной плоскости подъ дѣйствиемъ своей тяжести, если подвѣшена въ двухъ неподвижныхъ точкахъ A и B , называется *цѣпной линіею* (фиг. 129).

Найдемъ уравненіе цѣпной линіи. Пусть:

w — вѣсъ единицы длины нити = плотность нити,

ds — длина ея элемента, такъ что:

$w ds$ — вѣсъ элемента нити,

C — нижняя точка нити; въ этой точкѣ касательная горизонтальна.

Примемъ какую-нибудь горизонтальную прямую, лежащую въ плоскости нити, за ось x , вертикаль, проходящую чрезъ C примемъ за ось y . Пусть:

φ — уголъ наклоненія касательной къ точкѣ m нити къ оси x ,

T_0 — натяженіе въ C ,

T — натяженіе въ точкѣ P ,

S = длина части CP нити.

Направленія натяженій T_0 и T указаны на чертежѣ (фиг. 129) стрѣлками.

Часть CP нити находится подъ дѣйствиемъ трехъ силъ: T_0 , T и вѣса $w \cdot s$ приложеннаго къ центру тяжести дуги CP .

Равновѣсіе горизонтальныхъ слагающихъ выразится уравненіемъ:

$$T \cos \varphi = T_0 \dots \dots \dots (826)$$

Равновѣсіе вертикальныхъ составляющихъ выразится уравненіемъ:

$$T \sin \varphi = w \cdot s \dots\dots\dots (827)$$

Раздѣливъ почленно (827) на (826), получимъ:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{w \cdot s}{T_0} \dots\dots\dots (828)$$

Если нить однородна, то w постоянное, и можно положить:

$$\frac{T_0}{w} = c. \dots\dots\dots (829)$$

такъ что (828) приметъ видъ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c} \dots\dots\dots (930)$$

Извѣстно, что:

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \dots\dots\dots (831)$$

Изъ (830) и (831) слѣдуетъ:

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{c^2}{s^2}$$

или

$$dy = \pm \frac{s ds}{\sqrt{s^2 + c^2}} \dots\dots\dots (832)$$

Интегрируя (832), получимъ:

$$y + A = \pm \sqrt{s^2 + c^2} \dots\dots\dots (833)$$

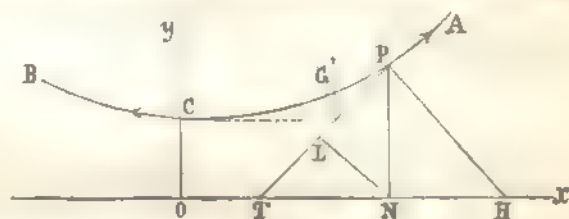
гдѣ A постоянное интегриаціи. Если x и s увеличиваются, то и y увеличивается, какъ это видно изъ (830). Поэтому

въ (833) нужно передъ радикаломъ взять знакъ $+$. При $s = 0$ изъ (833) имѣемъ $y + A = c$. Слѣдовательно, если возьмемъ ось x на разстояніи c ниже точки C , то $A = 0$, и (833) приметъ видъ:

$$y^2 = s^2 + c^2 \dots\dots\dots (834)$$

Подставивъ въ (830) величину dy изъ (832), найдемъ:

$$\frac{c ds}{\sqrt{s^2 + c^2}} = dx \dots\dots\dots (835)$$



Фиг. 129.

Интегрируя (835), получимъ:

$$c \cdot \lg [s + \sqrt{s^2 + c^2}] = x + B \dots \dots \dots (836)$$

гдѣ B постоянное интегрир. При $x = 0$ и $s = 0$, поэтому $B = c \lg c$, и (836) приметъ видъ:

$$\sqrt{s^2 + c^2} + s = ce^{\frac{x}{c}} \dots \dots \dots (837)$$

Изъ (837) и (834) находимъ:

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right) \dots \dots \dots (838)$$

$$s = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right) \dots \dots \dots (839)$$

Здѣсь (839) даетъ длину нити отъ C до точки P , имѣющей абсциссу x , тогда какъ (838) и есть *уравненіе цѣпной линіи*. Вертикаль Oy , проходящая чрезъ нижнюю точку C нити, называется *осью цѣпной линіи*. Горизонталь Ox , лежащая подъ нитью на разстояніи c отъ C , называется *директрисой* цѣпной линіи. Нижняя точка C называется *вершиною* цѣпной линіи.

§ 332. Свойства цѣпной линіи. Уравненія (826) и (829) показываютъ что *горизонтальная слагающая напряженія одинакова во всякой точкѣ цѣпной линіи и равна $w \cdot c$* .

Уравненіе (827) показываетъ, что *вертикальная слагающая напряженія равна $w \cdot s$, то есть пропорціональна длинѣ нити, считаемой отъ вершины C до рассматриваемой точки m* .

Возвышая почленно въ квадратъ и складывая (826) и (827), получимъ:

$$T^2 = T_0^2 + w^2 \cdot s^2$$

или, согласно съ (829):

$$T^2 = w^2 (s^2 + c^2)$$

или, согласно съ (834):

$$T = w \cdot y \dots \dots \dots (840)$$

Слѣдовательно: *полное напряженіе равно $w \cdot y$, то есть пропорціонально ординатѣ*.

Укажемъ на нѣкоторыя свойства цѣпной линіи.

Положимъ, что mN есть ордината въ m , такъ что, согласно съ (840):

$$T = w \cdot Nm \dots \dots \dots (841)$$

Опустимъ изъ N перпендикуляръ NL на касательную, проведенную въ m . Тогда:

$$\text{уголъ } mNL = \varphi$$

$$mL = mN \cdot \sin \varphi = s \dots \dots \dots (842)$$

Извѣстно, что въ циклоидѣ, описанной катаньемъ круга радіуса a

$$\rho = 4a \cos \varphi$$

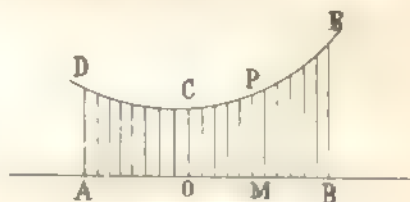
$$s = 4a \sin \varphi$$

Подставляя въ (854), найдемъ:

$$w = \frac{T_0}{4a} \sec^3 \varphi = \frac{16a^2 T_0}{(16a^2 - s^2)^{3/2}} \dots \dots \dots (861)$$

§ 335. Параболическая нить. Рѣшимъ задачу, относящуюся къ устройству цѣпныхъ мостовъ.

На нити DCE подвѣшена помощь весьма легкихъ вертикальных нитей другая нить AOB (фиг. 130). Всѣ нити DCE и вертикальных нитей ничтоженъ сравнительно съ вѣсомъ нити AOB . Вертикальных нитей такъ много, что каждый элементъ нити AOB виситъ на особой вертикальной нити. Найти кривую, по которой должна расположиться верхняя нить DCE для того, чтобы нижняя нить AOB была прямолинейна.



Фиг. 130.

Натяженія въ точкахъ O и M нижней нити горизонтальны и взаимно равны; слѣдовательно вѣсъ части OM несетъ натяженіями въ точкахъ C и P верхней нити. Поэтому верхняя нить DCE можетъ быть разсматриваема какъ такая однородная тяжелая нить, въ которой вѣсъ какой-нибудь ея части CP равенъ mx , гдѣ x разстояніе OM .

Равновѣсіе горизонтальныхъ силъ даетъ:

$$T \cos \varphi = T_0 \dots \dots \dots (862)$$

Равновѣсіе вертикальныхъ силъ даетъ:

$$T \sin \varphi = mx \dots \dots \dots (863)$$

Для (863 на 862), получимъ:

$$mx = T_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi = T \cdot \frac{dy}{dx} \dots \dots \dots (864)$$

Интегрируя (864), получимъ:

$$\frac{mx^2}{2} = T_0 \cdot (y - c), \dots \dots \dots (865)$$

гдѣ c постоянное интегрированія.

Уравненіе (865) представляетъ собою параболу. Итакъ: верхняя нить располагается по параболѣ.

Нижняя нить можетъ быть замѣнена балками моста. Эта задача была рѣшена впервые академикомъ Николаемъ Фуссомъ (Nova Acta Petropo-

litana, t. 12, 1794), проектировавшимъ цѣпной мостъ черезъ Неву, въ нашедшимъ, что изготовлявшіяся въ то время цѣпи не выдержали бы такого моста.

§ 336. Цѣпь равнаго сопротивленія. Тяжелая нить, висящая на двухъ неподвижныхъ точкахъ, такова, что площади ея поперечныхъ сѣченій пропорциональны натяжениямъ. Найти кривую, по которой располагается такая нить.

Всѣхъ элемента нити равенъ $n ds$. По условію задачи

$$T = c \cdot w, \dots \dots \dots (866)$$

гдѣ c нѣкоторый постоянный коэффициентъ. Получимъ:

$$T \cos \varphi = T_0 \dots \dots \dots (867)$$

$$T \sin \varphi = \frac{1}{c} \int T ds \dots \dots \dots (868)$$

Отсюда:

$$c \cdot \lg \varphi = \int \sec \varphi \cdot ds \dots \dots \dots (869)$$

Дифференцируя, получимъ:

$$c \cdot \sec^2 \varphi = \sec \varphi \cdot \frac{ds}{d\varphi} \dots \dots \dots (870)$$

Отсюда:

$$\rho \cos \varphi = c \dots \dots \dots (871)$$

Здѣсь φ есть уголъ, составляемый касательною съ горизонтальною. Онъ равенъ углу, составленному нормалію съ вертикалью: Слѣдовательно (871) показываетъ, что въ настоящемъ случаѣ: проложеніе радиуса кривизны на вертикаль, есть величина постоянная.

Пользуясь формулами (855) и (856), получимъ изъ (871):

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c} \dots \dots \dots (872)$$

Интегрируя, получимъ:

$$\frac{dy}{dx} = \lg \left(\frac{x}{c} + A \right) \dots \dots \dots (873)$$

гдѣ A постоянное интегрированія. Если начало взято въ нижней точкѣ нити, то $A = 0$. Поэтому:

$$\frac{dy}{dx} = \lg \left(\frac{x}{c} \right) \dots \dots \dots (874)$$

Интегрируя, получимъ:

$$y = c \cdot \lg \sec \left(\frac{x}{c} \right) \dots \dots \dots (875)$$

Вотъ каково уравненіе нити равнаго сопротивленія.

§ 337. Уравненія равновѣсія нити, подъ дѣйствіемъ на нихъ бы то ни было силъ, въ переменныхъ присущихъ задачъ. Пусть (фиг. 131):

1 начало, отъ котораго отсчитывается длина s нити,

$$AP = s,$$

$$AQ = s + ds,$$

T натяженіе въ P .

$T + dT$ натяженіе въ Q .

Разложимъ силы, дѣйствующія на элементъ PQ , по касательной, по нормали и по бинормали (бинормалью называется перпендикуляръ къ касательной и нормали), проведеннымъ въ P . Пусть:

$F ds$ сила, направленная по касательной въ сторону возрастающихъ s

$G ds$ сила, направленная по внутренней нормали,

$H ds$ сила, направленная по бинормали,

C —центръ кривизны элемента $ds = PQ$.

Эти три направленія называются главными направленіями кривой въ точкѣ P . Уголъ PCQ равенъ углу $d\varphi$, составляемому касательными, проведенными въ точкахъ P и Q .

Элементъ ds находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ силъ:

$$T; T + dT; F ds; G ds; H ds.$$

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по касательной, дастъ:

$$(T + dT) \cdot \cos(d\varphi) - T + F ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (876)$$

Здѣсь уголъ $d\varphi$ весьма малъ, вслѣдствіе чего $\cos(d\varphi)$ можно принять за единицу, и (876) приметъ видъ:

$$dT + F ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (877)$$

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по нормали, дастъ:

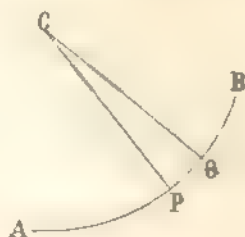
$$(T + dT) \sin(d\varphi) + G ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (878)$$

Здѣсь въ суммѣ $T + dT$ можно пренебречь членомъ dT и, вслѣдствіе малости угла $d\varphi$ положить $\sin(d\varphi) = d\varphi$. Тогда (878), согласно съ (845) приметъ видъ:

$$T \frac{ds}{\rho} + G ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (879)$$

Два последовательныхъ касательныхъ, по которымъ направлены натяженія T и $T + dT$, лежатъ въ плоскости прикосновенія и потому не дадутъ проложеній на бинормаль перпендикулярную къ этой плоскости. Поэтому равновѣсіе силъ, направленныхъ по бинормали, дастъ:

$$H \cdot ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (880)$$



Фиг. 131.

Уравнения (877), (879) и (880) и суть искомыя общія уравненія равновѣсія нити въ переменныхъ ρ и s . Плотность w предполагается включенною въ $F ds$, $G ds$ и $H ds$.

Эти уравненія показываютъ, что дѣйствіе натяженій T и $T + dT$ эквивалентно дѣйствію силы dT дѣйствующей по касательной и силѣ $T \frac{ds}{\rho}$ дѣйствующей по внутренней нормали.

§ 338. Уравненіе равновѣсія гибкой нити, подъ дѣйствіемъ накихъ бы то ни было силъ, въ Декартовыхъ координатахъ. На элементъ $ds = PQ$ (фиг. 132) дѣйствуютъ силы $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ и натяженія, приложенныя въ P и Q .

Проложеніе на ось x , натяженія, дѣйствующаго въ P равно $T \cos(ds, x)$ или $T \frac{dx}{ds}$ и направлено влѣво.

Проложеніе, на ось x , натяженія, дѣйствующаго въ Q равно, слѣдовательно.

$$\left(T \frac{dx}{ds} \right) + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) ds$$

и дѣйствуетъ вправо. Поэтому равновѣсіе силъ, направленныхъ по оси x дастъ:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) ds + X ds = 0.$$

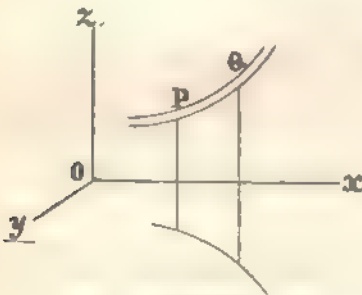
или

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X = 0.$$

Дѣйствуя такъ же съ проложеніями на оси y и z , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (881)$$

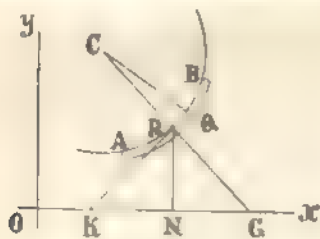
Таковы искомыя уравненія равновѣсія гибкой нити въ Декартовыхъ координатахъ.



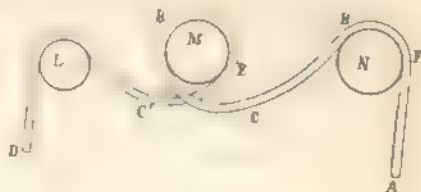
Фиг. 132.

Этот важный результат может быть выражен так: *если тяжёлая нить принуждена оставаться на совершенно гладкой кривой, лежащей в вертикальной плоскости и находится в равновесии под действием одной системы натяжений на концах, то разность натяжений в каких-либо двух её точках равна весу такой же нити, имеющей длину равную разности ординат этих точек.*

Этот результат выведен только из уравнения (883), то есть из равновесия силъ, действующих только по направлению касательной. Поэтому онъ не зависитъ отъ уравнения (884). Следовательно, если нить только некоторыми своими частями принуждена лежать на совершенно



Фиг. 133.



Фиг. 134.

гладкихъ кривыхъ, какъ это показано на чертежѣ (фиг. 134), то уравнение (886) и результаты, имъ выражаемые, остаются вѣрными и для такой нити. Если при этомъ нить виситъ такимъ образомъ только подъ діеііемъ собственной тяжести безъ особыхъ грузовъ на концахъ, то изъ сказаннаго по поводу (886) слѣдуетъ, что концы ея *A* и *B* будутъ находиться на одной горизонтали и ниже этой горизонтали не будетъ находиться ни одна точка нити, а наибольшія напряжения будутъ въ наивысшихъ точкахъ нити.

Для опредѣленія натяженія въ какой-либо точкѣ *P* (фиг. 133) напишемъ (884) въ видѣ:

$$R_p = T - w p \cdot \cos \varphi (887)$$

Если *T* есть натяженіе въ какой-нибудь точкѣ *A* и *z* высота точки *P* надъ *A* (разность высотъ точекъ *P* и *A*), то, согласно съ (886):

$$T = T_1 + w z$$

и (887) принимаетъ видъ:

$$R_p = T_1 + w (z - p \cdot \cos \varphi) (888)$$

Отложивъ по нормали длину *PS* — *z* въ сторону противоположную *p*, получимъ точку *S*, которую можно назвать *антицентромъ*. Высота антицентра *S* надъ *A* равна

$$z - p \cdot \cos \varphi (889)$$

(888) выражаетъ, слѣдовательно, что разность *R_p — T₁*, равна вѣсу нити, длина которой равна разности высотъ антицентра *S* и точки *A*.

Если конецъ A свободенъ (фиг. 134), то R_p въ точкѣ B равно произведенію u на высоту B надъ A . Въ тѣхъ точкахъ $C, C \dots$ въ которыхъ нить свободна, давление R равно нулю. Слѣдовательно, всѣ антицентры кривизны свободныхъ частей лежатъ на прямой, соединяющей свободные концы A и D . Эта прямая называется *общей директрисой* провѣсовъ $C, C' \dots$.

Отсюда слѣдуетъ, что натяженіе T въ каждой точкѣ P нити равно uy , гдѣ y есть высота точки P надъ горизонталью, называемою *статической директрисой*. Величина R_p равна uy' , гдѣ y' есть высота антицентра надъ статической директрисой. Если имѣются свободные концы A и D , то они лежатъ на статической директрисѣ.

§ 341. **Равновѣсіе легкой нити на шероховатой кривой.** Положимъ, что вѣсь нити очень малъ, но между нитью и кривою, на которой она лежитъ, существуетъ треніе. Благодаря тренію, силы F' и F'' , дѣйствующія на концахъ A и B (фиг. 133) не равны.

Положимъ, что нить стремится сдвинуться въ направленіи AB . Трение на элементъ ds равно $\mu R ds$, гдѣ μ коэффициентъ тренія. Оно дѣйствуетъ въ направленіи BA .

Примѣняя къ настоящему случаю уравненія (883) и (884) съ пренебреженіемъ вѣса и введеніемъ тренія, получимъ

$$dT - \mu R ds = 0 \dots \dots \dots (890)$$

$$T \frac{ds}{\rho} - R ds = 0 \dots \dots \dots (891)$$

Исключая R , найдемъ:

$$\frac{dT}{T} = \mu \frac{ds}{\rho} = \mu d\varphi \dots \dots \dots (892)$$

Интегрируя получимъ:

$$\ln T = \mu \varphi + C$$

или

$$T = Be^{\mu \varphi} \dots \dots \dots (893)$$

гдѣ A и B неопредѣленные постоянныя.

Если T_1 и T_2 суть натяженія въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ касательныя составляютъ съ горизонтальною углы φ и φ_2 , то

$$T_2 = T_1 \cdot e^{\mu(\varphi_2 - \varphi)} \dots \dots \dots (894)$$

Это уравненіе (894) показываетъ, что если легкая нить находится на шероховатой кривой въ предѣльномъ равновѣсіи, то:

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu(\varphi_2 - \varphi)}$$

Изъ (891) видимъ, что R_p равно натяженію T

§ 342. Равновѣсіе тяжелой нити на шероховатой кривой. Вводя въ уравненія (883) и (884) и вѣсъ и треніе, получимъ:

$$dT - w \cdot ds \cdot \sin \varphi - \mu R ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (895)$$

$$T \cdot \frac{ds}{\rho} - \mu \cdot ds \cdot \cos \varphi - R ds = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (896)$$

Исключая R , получимъ:

$$\frac{dT}{d\varphi} - \mu T = w\rho (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (897)$$

Помноживъ обѣ части на $e^{-\mu\varphi}$ и интегрируя, получимъ:

$$Te^{-\mu\varphi} = \int w\rho (\sin \varphi - \mu \cos \varphi) \cdot e^{-\mu\varphi} d\varphi + C \quad . \quad . \quad . \quad (898)$$

Если дана форма кривой, то опредѣливъ ρ чрезъ φ , вставивъ въ (898) и взявъ интегралъ, получимъ:

$$Te^{-\mu\varphi} = f(\varphi) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (899)$$

Давленіе опредѣлится уравненіемъ:

$$R\rho = T - w\rho \cdot \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (900)$$

Если нить огибаетъ небольшой блокъ, такъ что можно пренебречь вѣсомъ ея части прилегающей къ блоку, то можно пользоваться формулами предыдущаго параграфа и для тяжелой нити.

ГЛАВА III.

Равновѣсіе гибкой нити на поверхности.

§ 343. Равновѣсіе гибкой нити на совершенно гладкой поверхности подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ.

Пусть:

$$f(x, y, z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (901)$$

есть уравненіе поверхности, на которой лежитъ нить. Пусть:

$R ds$ — давленіе поверхности на нить, направленное по *внѣшней* нормали,

l, m, n — косинусы угловъ, составляемыхъ *внутреннею* нормалью съ осями.

Пользуясь уравненіями (881) и включая въ нихъ силу $R ds$ получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X - Rl &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y - Rm &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z - Rn &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (902)$$

Здѣсь мы имѣемъ однимъ неизвѣстнымъ R больше, чѣмъ въ (881), но за то имѣемъ еще уравненіе (901).

§ 344. Уравненіе равновѣсія нити, лежащей на поверхности въ переменныхъ присущихъ задачѣ. Пусть (фиг. 135):

PQ — элементъ ds нити.

PA — касательная къ нити въ точкѣ P ,

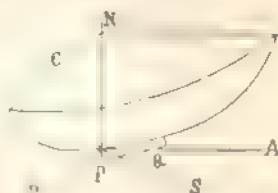
APB — плоскость касательная къ поверхности въ точкѣ P .

PB — перпендикуляръ къ PA въ плоскости APB .

PN — нормаль къ поверхности въ P ,

PC — радиусъ кривизны нити, лежащій въ плоскости BPB ,

θ — уголъ CPN образуемый плоскостью CPI соприкосновения нити и нормалью PN .



Фиг. 135.

Элементъ нити находится подъ дѣйствіемъ слѣдующихъ силъ: $X ds$, $Y ds$, $Z ds$ дѣйствующихъ по осямъ координатъ, которыя не изображены на чертежѣ (фиг. 135),

давленія $R ds$ по NP , натяженій въ P и Q , которыя, согласно съ § 339-мъ, суть: dT по PQ и $T \frac{ds}{\rho}$ по PC .

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по касательной, дастъ:

$$dT + X ds \frac{dx}{ds} + Y ds \frac{dy}{ds} + Z ds \frac{dz}{ds} = 0.$$

Отсюда;

$$T + \int (X dx + Y dy + Z dz) = A \dots \dots (903)$$

гдѣ A постоянное интегрированія.

Положимъ, что сила консервативна (X , Y , Z — суть производныя по x , y , z силовой функции W). Тогда $\int (X dx + Y dy + Z dz)$ есть работа заданныхъ силъ. Уравненіе (903) выражаетъ, что *сумма натяженія T и работы заданныхъ силъ есть величина постоянная* (одинакова во всѣхъ точкахъ нити).

Взявъ интегралъ $\int (X dx + Y dy + Z dz)$ въ предѣлахъ между двумя точками P и P' нити, получимъ: разность $T_2 - T_1$ натяженій въ двухъ точкахъ нити не зависятъ отъ длины и формы нити и равна разности работъ въ этихъ точкахъ, производимыхъ заданными силами.

Условимся измѣрять ρ *внутрь* по PC и R *внѣ* по NP . Положимъ, что l , m , и суть косинусы угловъ составляемыхъ съ осями координатъ *внутреннюю* нормалью PN . Равновѣсіе силъ, направленныхъ по нормали, дастъ:

$$T \frac{ds}{\rho} \cos \theta + X l ds + Y m ds + Z n ds - R ds = 0 \dots \dots (904)$$

По известной теоремѣ о кривизнѣ линий, лежащихъ на поверхностяхъ, радиусъ кривизны ρ нити будетъ равенъ

$$\rho = \rho' \cos \theta, \quad (905)$$

гдѣ ρ' есть радиусъ кривизны нормального сѣченія поверхности, сдѣланнаго плоскостью NP_1 , содержащею нормаль поверхности и касательную къ нити. Поэтому (904) приметъ видъ:

$$\frac{T}{\rho'} + Xl + Ym + Zn = R. \quad (906)$$

Это уравненіе (906) показываетъ, что равнодѣйствующее давленіе R на поверхность равно суммѣ нормального давленія, происходящаго отъ натяженія, и давленія равнаго проложенію заданныхъ силъ на нормаль.

Разсмотримъ наконецъ равновѣсіе силъ, направленныхъ по касательной PB къ поверхности. Пусть λ , μ , ν суть косинусы наклоненія прямой PB къ осямъ координатъ, удовлетворяющіе уравненіямъ перпендикулярности:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f}{\partial y} + \nu \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 \\ \lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} &= 0. \end{aligned}$$

Равновѣсіе силъ, направленныхъ по PB дастъ

$$\frac{T}{\rho} \sin \theta + X\lambda + Y\mu + Z\nu = 0. \quad (907)$$

Уравненія (903), (906) и (907) суть искомыя уравненія равновѣсія.

§ 345. Геодезическія линіи. Если на какую-нибудь часть нити не дѣйствуютъ заданныя силы, а только натяженія, то для этой части $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Это можетъ быть, напримѣръ, въ томъ случаѣ, если мы, держа нить въ рукахъ, наложимъ ее на поверхность такъ, что концы, идущіе отъ рукъ къ поверхности, будутъ вытянуты въ прямыя линіи, а остальная часть нити натянется на поверхности, принявъ видъ нѣкоторой кривой; эта именно часть нити, лежащая на поверхности и разсматривается.

Уравненіе (906) показываетъ, что натяженія во всѣхъ точкахъ части, лежащей на поверхности, одинаково.

Уравненіе (906) показываетъ, что давленіе пропорціонально кривизнѣ поверхности по нити.

Уравненіе (907) показываетъ, что $\theta = 0$, то-есть, что плоскость соприкосновенія нити содержитъ въ себѣ нормаль къ поверхности. Кривая, идущая по поверхности такъ, что во всѣхъ ея точкахъ нормаль поверхности находится въ плоскости соприкосновенія, называется *геодезическою линіею*.

Итакъ: *Нить, натянутая на поверхность, принимаетъ видъ одной изъ геодезическихъ линий поверхности.*

Поэтому, наприкладъ:

- 1) *Нить, натянутая на шаръ, располагается по дугѣ большого круга.*
- 2) *Нить, натянутая на круглый цилиндръ, располагается по винтовой лини, частными случаями которой могутъ быть также окружность перпендикулярная къ образующимъ или одна изъ образующихъ.*

ГЛАВА IV.

Равновѣсiе растяжимой гибкой нити.

§ 346. Законъ Гука. Положимъ, что растяжимая (эластическая) нить имѣетъ, въ обыкновенномъ (нерастянutomъ) состоянiи длину l_1 . Если приложить къ ея концамъ двѣ равныя и противоположныя силы, изъ коихъ каждая равна T , то нить растянется, и длина ея сдѣлается равною l . Опытъ показываетъ, что полное удлинениe $l - l_1$ нити пропорционально ея первоначальной длинѣ l_1 и пропорционально силѣ T .

Въ этомъ и состоитъ законъ Гука, который можетъ быть выраженъ формулою:

$$l - l_1 = l_1 \frac{T}{E} \dots \dots \dots (908)$$

гдѣ E есть нѣкоторый постоянный для данного вещества коэффициентъ.

Если двѣ равныя и параллельныя нити будутъ растягиваемы силами, изъ которыхъ каждая равна T и приложена къ совокупности обѣихъ нитей, то, само собою разумѣется, что для такого же удлинениа ихъ, какое было произведено надъ одною нитью, потребуетъ вдвое большая сила T . Слѣдовательно сила, необходимая для произведенiа данного удлинениа нити, приготовленной изъ данного вещества, пропорциональна площади поперечнаго сѣченiа нити.

Поэтому и коэффициентъ E пропорционаленъ площади поперечнаго сѣченiа нерастяннутой нити. Однако обыкновенно коэффициентъ E относятъ къ единицѣ площади поперечнаго сѣченiа, для того чтобы можно было составить таблицы такихъ коэффициентовъ для данныхъ веществъ. Коэффициентъ E , отнесенный къ единицѣ площади поперечнаго сѣченiа, называется *коэффициентомъ упругости* или *модулемъ Юнга*. Чѣмъ больше коэффициентъ упругости вещества, тѣмъ *менше* растягивается, подѣ дѣйствiемъ данной силы, нить данного поперечнаго сѣченiа, приготовленная изъ этого вещества.

Если бы можно было растянуть нить вдвое противъ ея натуральной длины и нить при этомъ не рвалась бы и не переставала слѣдовать закону Гука, то, какъ видно изъ (908), нужно было бы приложить къ ея

концамъ такая сила T , изъ коихъ каждая равнялась бы E . Если одинъ конецъ нити закрѣпленъ неподвижно, то достаточно приложить къ свободному ея концу силу T , для того чтобы, по 3-му закону Ньютона, сейчасъ же появилось равное и противоположное противоѣдѣствіе T у закрѣпленнаго конца. Поэтому можно сказать, что коэффициентъ упругости равенъ тому грузу, который надо повѣсить на свободный конецъ нити, приготовленной изъ данного вещества и имѣющей площадь поперечнаго сѣченія равную единицу, для того чтобы, теоретически говоря, удвоить длину нити.

На самомъ дѣлѣ такое удвоение длины безъ разрыва и безъ отступленія отъ закона Гука можетъ быть произведено только съ нитью приготовленною изъ такого растяжимаго вещества, какъ каучукъ. Въ большинствѣ же случаевъ, при постепенной нагрузкѣ, раньше чѣмъ будетъ достигнуто удвоение длины, произойдетъ разрывъ, а еще раньше начнутъ отступленія отъ закона Гука.

Тотъ наибольшій грузъ, который можно повѣсить на нить, имѣющую площадь поперечнаго сѣченія равную единицу, не заставляя еще ея отступать отъ закона Гука, называется *предѣломъ упругости*.

Тотъ наименьшій грузъ, при которомъ происходитъ разрывъ нити, имѣющей площадь поперечнаго сѣченія равную единицу, называется *предѣломъ временнаго сопротивленія*.

Въ послѣдующемъ мы будемъ предполагать, что не заходимъ за предѣлъ упругости.

§ 347. Равновѣсіе растяжимой нити, растягиваемой грузомъ W . Изслѣдуемъ равновѣсіе однородной нити, одинъ конецъ которой закрѣпленъ неподвижно, а на другой надѣтъ грузъ W . Пусть (фиг. 136):

	O, A_1 — нить въ состояніи нерастянутаго (ни грузомъ, ни своимъ вѣсомъ),
O	
O, A	OA — нить растянутая грузомъ W .
P_1, Q_1	P_1Q_1 — элементъ нерастянутой нити.
P, Q	PQ — элементъ растянутой нити,
	l — вѣсъ единицы нерастянутой нити,
	$l_1 = O_1A_1; \quad x_1 = O_1P,$
A_1	$l = OA; \quad x = OP$
A	$\epsilon = \frac{1}{E}$

Фиг. 136.

Напряжение T въ точкѣ P уравнивается вѣсомъ части нити PA и грузомъ W . Поэтому:

$$T = w(l_1 - x_1) + W \dots \dots \dots (909)$$

Прилагая формулу (908) къ элементу PQ получимъ:

$$dx - dx_1 = dx_1 \cdot \epsilon \cdot T \dots \dots \dots (910)$$

Исключая T изъ (909) и (910), получимъ:

$$\frac{dx}{dx_1} = 1 + \varepsilon [w(l_1 - x_1) + W] \dots (911)$$

Интегрируя (911), получимъ:

$$x = x_1 + \varepsilon \left[w \left(l_1 x_1 - \frac{1}{2} x_1^2 \right) + W x_1 \right] + C \dots (912)$$

При $x_1 = 0$ и $x = 0$. Следовательно $C = 0$. Поэтому, полагая въ (912) $x_1 = l_1$, получимъ:

$$l - l_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot w \cdot l_1^2 + \varepsilon W \cdot l_1 = \text{удлинение} \dots (914)$$

Еслибы не было груза, то удлинение, согласно съ (§ 913) было бы $\frac{1}{2} \varepsilon \cdot w \cdot l^2$. Если бы нить не имѣла вѣса, то удлинение подъ дѣйствіемъ груза, согласно (913), было бы $\varepsilon W l$. Следовательно, *удлинение* $\frac{1}{2} \varepsilon w l_1^2 = \frac{1}{2} \varepsilon w l_1 \cdot l_1$ *подъ вліяніемъ собственнаго вѣса нити равно тому удлинению, которое происходитъ отъ подвѣшеннаго груза равнаго половинѣ вѣса нити.*

§ 348. Уравненія растяжимой нити, подвѣшенной въ двухъ точкахъ. Для опредѣленія уравненія той кривой, по которой располагается тяжелая растяжимая нить, подвѣшенная въ двухъ точкахъ, поступаемъ такъ, какъ въ § 331-мъ. Пусть $l' = s_1$ — длина нерастянутой части, считая отъ нижней точки до P , остальные обозначенія такія же, какъ въ § 331-мъ. Получимъ:

$$T \cos \varphi = T_0 \dots (914)$$

$$T \sin \varphi = W \cdot s_1 \dots (915)$$

Отсюда:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{ws_1}{T_0} = \frac{s_1}{c} \dots (916)$$

$$T^2 = w^2 (c^2 + s_1^2) \dots (917)$$

Но

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi; \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi.$$

Поэтому изъ (914), (915) и (908), получимъ:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{T}{T} ds = \int \frac{wc}{T} \left(1 + \frac{T}{E} \right) ds, \\ &= \frac{wc}{E} s_1 + c \cdot \operatorname{tg} \left[s_1 + \frac{1}{c} (c^2 + s_1^2) \right] \dots (918) \end{aligned}$$

$$y = \int \frac{w}{T} \cdot s_1 ds = wc \int \frac{s_1}{T} ds = \frac{w}{2E} (c^2 + s_1^2) + \sqrt{c^2 + s_1^2} \dots (919)$$

Исключая s_1 изъ (918) и (919) получили бы искомое уравненіе.

ОТДѢЛЪ VIII.

Равновѣсіе упругихъ стержней.

ГЛАВА I.

Растяженіе стержней.

§ 349. Растяженіе вертикальнаго стержня, верхній конецъ котораго закрѣпленъ неподвижно. Представимъ себѣ вертикальный стержень, верхній конецъ котораго закрѣпленъ неподвижно. Такой стержень будетъ растягиваться подѣ вліяніемъ груза, подвѣшеннаго на его нижнемъ концѣ и даже подѣ вліяніемъ собственнаго вѣса. Если ω есть площадь поперечнаго сѣченія стержня, которое мы предполагаемъ значительно меньшимъ длинъ его, и T натяженіе на единицу площади поперечнаго сѣченія, то натяженіе во всѣхъ сѣченіяхъ равно ωT . Такъ какъ стержень можно себѣ представить состоящимъ изъ множества волоконъ, то къ нему приложимъ законъ Гука, данный въ § 346-мъ, то есть формула

$$\frac{l - l_1}{l_1} = \frac{T}{E} \dots \dots \dots (920)$$

§ 350. Теорія растяженія прямого стержня. Разсмотримъ болѣе подробно растяженіе стержня. Подѣ именемъ прямого стержня мы разумѣемъ упругое твердое тѣло, имѣющее въ нерастянутомъ состояніи форму цилиндра съ поперечнымъ сѣченіемъ какого угодно вида. При растяженіи стержень дѣлается тоньше, такъ что его частицы подвергаются не только продольнымъ, но и поперечнымъ перемѣщеніемъ и только *одно* прямолинейное волокно стержня не подвергается поперечнымъ перемѣщеніемъ; оно называется *центральноймъ*.

Примемъ центральное волокно за ось x и возьмемъ начало координатъ въ точкѣ его закрѣпленія. Положимъ, что растягивающія силы на концахъ распределены такъ по поперечнымъ сѣченіямъ концовъ, что каждое плоское поперечное сѣченіе остается плоскимъ и перпендикулярнымъ къ центральному волокну и послѣ растяженія стержня. Пусть:

x, y, z — координаты точки P стержня до растяженія,

$(x + u), (y + v), (z + w)$ — координаты точки P послѣ растяженія.

Докажемъ, что, полагая:

$$u = Ax; v = -By; w = -Cx \dots \dots \dots (921)$$

можно найти такія постоянныя A, B, C , при которыхъ удовлетворятся уравненія равновѣсія стержня.

Положимъ, что $PQRS$ (фиг. 137) есть элементъ стержня до растяженія, имѣющій видъ параллелепипеда, у котораго стороны PQ и RS перпендикулярны къ центральному волокну. По принятой нами гипотезѣ, относительно того, что плоскія поперечныя сѣченія остаются плоскими и перпендикулярными къ центральному волокну, параллелепипедъ $PQRS$, послѣ растяженія приметъ видъ тоже прямоугельнаго параллелепипеда $P'Q'R'S'$ (фиг. 137). Слѣдовательно натяженія на всѣхъ его сторонахъ будутъ перпендикулярны къ этимъ сторонамъ. Пусть $N_x,$



Фиг. 137.

N_y, N_z натяженія параллельныя осямъ и отнесенныя къ единицѣ площади перпендикулярныхъ къ нимъ граней параллелепипеда, дѣйствующія на грани сходящіяся въ P' . Условимся считать ихъ положительными—когда они растягиваютъ (какъ въ нити) и отрицательными, когда они сжимаютъ. Пусть:

a, b, c ребра параллелепипеда до растяженія.

$a(1 + \alpha), b(1 + \beta), c(1 + \gamma)$ —ребра параллелепипеда послѣ растяженія.

Силы N_x, N_y, N_z будутъ функциями переменныхъ α, β, γ . Разлагая эти функции въ ряды по возрастающимъ степенямъ переменныхъ α, β, γ и пренебрегая степенями выше первой, получимъ

$$N_x = k\alpha + \lambda(\beta + \gamma) \dots \dots \dots (922)$$

Здѣсь при β и γ коэффициенты одинаковы, потому что мы предполагаемъ вещество стержня однороднымъ по отношенію растягиванія по какому бы то ни было направленію (изотропнымъ, а не кристаллическимъ или слоистымъ). По той же причинѣ N_x должно такъ же выражаться чрезъ β, γ, α , какъ N_x выражено чрезъ α, β, γ . Поэтому:

$$N_x = k\beta + \lambda(\gamma + \alpha) \dots \dots \dots (922)$$

Точно такъ же:

$$N_y = k\gamma + \lambda(\alpha + \beta) \dots \dots \dots (924)$$

Полагая:

$$k = \lambda = 2\mu,$$

можно представить (922) (923) и (924) въ болѣе симметричной формѣ:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 2\mu\alpha + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \\ N_y &= 2\mu\beta + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \\ N_z &= 2\mu\gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (925)$$

Ребра $dx \, dy \, dz$ нерастянутого элемента превратившись, послѣ растяжения въ $dx + du, \, dy + dv, \, dz + dw$. Слѣдовательно:

$$\alpha = \frac{du}{dx}; \quad \beta = \frac{dv}{dy}; \quad \gamma = \frac{dw}{dz} \quad \dots \dots \dots (926)$$

Вслѣдствіе существованія равенствъ (921) и (926) уравненія (925) примутъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= 2\mu A + \lambda(A - 2B) \\ N_y &= -2\mu B + \lambda(A - 2B) \\ N_z &= -2\mu B + \lambda(A - 2B) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (927)$$

Эти уравненія не зависятъ отъ x, y, z , такъ что каждый *внутренній* элементъ находится подъ дѣйствіемъ равныхъ и противоположныхъ силъ, приложенныхъ къ его противоположнымъ гранямъ, такъ какъ, напримѣръ, правая грань одного служитъ лѣвою гранью сосѣдняго. Слѣдовательно, при принятой гипотезѣ, выраженной уравненіями (921) *внутренніе элементы находятся въ равновѣсіи*.

Остается рассмотреть элементы *пограничные*, то-есть такіе, у которыхъ одна или нѣсколько граней находятся на боковой поверхности стержня. Такія грани параллельны центральной оси и (въ пустотѣ) не подвержены никакимъ вѣшнимъ давленіямъ. Слѣдовательно для равновѣсія пограничныхъ элементовъ необходимо, чтобы N_x и N_z были равны нулю, то-есть, согласно съ (927), нужно, чтобы:

$$-2\mu B + \lambda(A - 2B) = 0$$

или

$$B = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \dots \dots \dots (928)$$

Исключая B изъ (928) и перваго уравненія системы (927) получимъ:

$$N_x = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} A \quad \dots \dots \dots (929)$$

Согласно нашимъ обозначеніямъ Ax —есть удлиненіе, Bx —боковое сжатіе стержня длины x и ширины y ; N_x —есть растягивающая сила на единицу площади поперечнаго сѣченія. Поэтому (928) и (929) даютъ:

$$A = \frac{\text{удлиненіе}}{\text{первоначальная длина}} = \frac{\lambda + \mu}{2(3\lambda + 1\mu)} N_x \quad \dots \dots (930)$$

$$B = \frac{\text{уменьшеніе ширивы}}{\text{первоначальная ширива}} = \frac{\lambda}{2\mu, 3\lambda + 2\mu} N_x \dots (931)$$

При такихъ A и B все элементы уравновѣшены; что и требовалось доказать.

Сравнивая (930) съ закономъ Гука:

$$\frac{l - l_1}{l_1} = \frac{T}{E} \dots \dots \dots (920)$$

видимъ, что:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \dots \dots \dots (932)$$

Называя чрезъ E_1 соответствующій коэффициентъ упругости бокового сжатія, получимъ изъ сравненія (931) и (920) съ (932).

$$E_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda} E \dots \dots \dots (932)$$

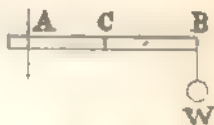
ГЛАВА II.

Сгибаніе стержней.

§ 351. Общія понятія о сгибаніи горизонтальнаго прямого стержня, за-
дѣланнаго однимъ концомъ въ стѣну. Положимъ, что AB (138) есть прямой
горизонтальный упругій стержень, задѣланный своимъ концомъ A въ не-
подвижную стѣну и несущий на свободномъ концѣ B грузъ W . Изслѣ-
зуемъ, каковы напруги въ стержнѣ, проходящемъ
чрезъ точку C , которыми поддерживается часть CB
стержня и грузъ W .

Положимъ сначала, что вѣсомъ самого стержня
можно пренебречь. Реакція въ C не можетъ со-
стоять изъ одной силы, потому что тогда эта сила
уравновѣшивалась бы силою W , съ которою она не
можетъ лежать на одной прямой. Чтобы опредѣлить
совокупность реакцій дѣйствующихъ въ C , перенесемъ силу W въ C . Для
того чтобы при этомъ не нарушить равновѣсія, мы обязаны, согласно
съ § 91-мъ, добавить еще пару, имѣющую моментъ $W \cdot BC$. Очевидно,
что внутреннія упругія силы (напряженія) должны быть, для равновѣсія,
эквивалентны силѣ W приложенной въ C по вертикали внизъ и парѣ
съ моментомъ $W \cdot BC$, но дѣйствовать въ противоположную сторону.

Если тяжестью стержня нельзя пренебречь, то можно разсматривать
вѣсъ W' части CB сосредоточеннымъ въ серединѣ отрѣзка CB . Перенеся
и его въ C , должны мы добавить пару съ моментомъ $W' \cdot \frac{BC}{2}$. Итакъ



Фиг. 138

избравъ C центромъ приведенія силъ, получимъ, что въ C дѣйствуютъ 1) сила $W + W'$ и 2) пара, имѣющая моментъ $W \cdot BC + W' \cdot \frac{BC}{2}$. Внутреннія напряжения въ C должны уравновѣшивать эту пару и силу Моментъ $W \cdot BC + W' \cdot \frac{BC}{2}$ называется *сгибающимъ моментомъ* въ данномъ случаѣ.

Сила $W + W'$ называется *сдвигомъ*.

Замѣтимъ, что оказалось достаточнымъ разсмотрѣть только силы, которыя были приложены по одну сторону отъ C , для опредѣленія реакцій въ C . Это происходитъ потому, что реакція въ C противъ силъ, дѣйствующихъ на CB , уравновѣшивается этими силами; равныя и противоположныя реакціи въ C противъ силъ, дѣйствующихъ на AC , уравновѣживаются этими силами. Поэтому достаточно изслѣдовать внѣшнія силы, дѣйствующія по одну сторону разсматриваемаго сѣченія; ихъ совокупность должна уравновѣшиваться реакціями этого сѣченія.

Всѣ внѣшнія силы, дѣйствующія по одну сторону разсматриваемаго сѣченія приводятся въ какую-нибудь точку C этого сѣченія, и получается пара, моментъ которой называется *сгибающимъ моментомъ* и сила перпендикулярная къ балкѣ, называемая *сдвигомъ*.

§ 352. Невѣсомая балка, лежащая на двухъ опорахъ подѣляемъ однимъ грузомъ. Балка, вѣсомъ которой можно пренебречь, лежитъ горизонтально на двухъ опорахъ A и B . Тяжелый грузъ W передвигается весьма тихо по балкѣ отъ одного конца до другого. Найти напряжения въ каждой точкѣ балки (фиг. 139).



Фиг. 139.

Положимъ, что грузъ W находится въ точкѣ M .

Пусть:

$$AM = \xi;$$

$$AB = l;$$

$$BM = l - \xi;$$

R и R' — давленія на опоры A и B .

Согласно §§ 81 и 83 получимъ:

$$R'l = W_1\xi \dots \dots \dots (934)$$

$$R_1l = W(l - \xi) \dots \dots \dots (935)$$

Этими уравненіями опредѣляются R и R' .

Найдемъ напряжения въ точкѣ P , полагая $AP = x$. Для этого, согласно съ предыдущимъ параграфомъ, достаточно разсмотрѣть равновѣсіе части AP балки, находящейся подѣ дѣйствіемъ только силы R . Перенеся эту силу въ P видимъ, что сдвигъ въ P равенъ R ; сгибающій моментъ равенъ Rx .

Сгибающій моментъ легче можетъ сломать балку чѣмъ сдвигъ, поэтому

разится уравненіемъ:

$$y = R_1 x = R_2 (x - a_2) + R_3 (x - a_3) = R_4 (x - a_4) \quad (939)$$

Эта опять прямая. Такимъ образомъ полная диаграмма сгибающихъ моментовъ выразится рядомъ наклонныхъ прямыхъ. Она можетъ быть построена весьма просто слѣдующимъ образомъ: вычисляемъ сгибающіе моменты только для тѣхъ точекъ, въ которыхъ приложены силы и откладываемъ эти моменты какъ ординаты. Соединивъ затѣмъ концы такихъ ординатъ прямыми, получимъ полную диаграмму.

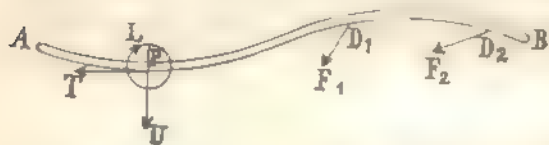
§ 354. Тяжелая не измѣняющая своего вида балка подѣ влияніемъ нѣсколькихъ поперечныхъ силъ. Если приходится принимать во вниманіе и вѣсъ балки, то диаграмма будетъ имѣть другой видъ. Сгибающій моментъ будетъ, въ этомъ случаѣ, содержать не только силы R_1, R_2, \dots но и вѣсъ части A_1P балки, приложенный въ средѣ этой части. Она будетъ равна

$$y = \Sigma R (x - a) - \frac{1}{2} \kappa x^2 \quad (940)$$

гдѣ κ есть вѣсъ единицы длины балки.

Уравненіе (940) представляетъ собою параболу. Такова диаграмма для точекъ P лежащихъ въ промежуткѣ между двумя послѣдовательными силами R . Полная диаграмма состоитъ изъ нѣсколькихъ параболъ, изъ коихъ каждая пересекаетъ слѣдующую въ концѣ ординаты, возставленной изъ точки приложенія одной изъ силъ R . Оси всѣхъ параболъ перпендикулярны къ балкѣ.

§ 355. Кривая балка подѣ влияніемъ нѣсколькихъ силъ, мало измѣняющихъ ея форму. Представимъ себѣ тонкую кривую балку (фиг. 141).



Фиг. 141.

Пусть:

T —натяженіе въ точкѣ P ,

U —сдвигъ въ точкѣ P ,

L —сгибающій моментъ въ точкѣ P ,

F_1, F_2, \dots силы приложенныя въ D_1, D_2, \dots

$\delta_1, \delta_2, \dots$ углы, составляемыя этими силами съ касательною, проведенною въ P .

Согласно сказанному въ § 351, достаточно рассмотреть равновѣсіе въ части PB балки.

Равновѣсіе по касательной дасть:

$$T - \Sigma F \cos \delta = 0 \quad (941)$$

Равновѣсіе по нормали дасть:

$$U + \Sigma F \sin \delta = 0 \quad (942)$$

Пусть $p_1, p_2 \dots$ суть перпендикуляры, опущенные из P на силы $F_1 F_2 \dots$. Равновѣсіе паръ дастъ:

$$L + \Sigma Fp = 0 \dots \dots \dots (943)$$

Изъ (941), (942) и (943) можно опредѣлить T, U и L , если дана форма балки и силы F_1, F_2, \dots .

§ 356 Кривая балка подъ вліяніемъ силъ, значительно измѣняющихъ ея форму. Если приложенныя къ кривой балкѣ силы значительно измѣняютъ ея форму, такъ что окончательный видъ, принимаемый ею подъ вліяніемъ этихъ силъ, неизвѣстенъ, то способъ предыдущаго параграфа уже не приложимъ и приходится выводить уже не конечныя а дифференціальныя уравненія равновѣсія, рассматривая дѣйствіе силъ уже не на конечную часть балки, а на безконечно малый ея элементъ (балка предполагается весьма тонкою). Пусть (фиг. 142):



Фиг. 142.

PQ —рассматриваемый элементъ балки,

s —дуга DP считаемая отъ произвольно выбраннаго начала D .

Пусть:

T —натяженіе, считаемое положительнымъ въ направленіи PA ,

U —сдвигъ, считаемый положительнымъ по внутренней нормали PC ,

L —моментъ пары въ P , направленной по стрѣлкѣ.

Напряженія, которыми часть AP дѣйствуетъ на PB будутъ

$$T, U \text{ и } L \dots \dots \dots (944)$$

Напряженія, которыми часть QB дѣйствуетъ на QA будутъ:

$$T + dT, U + dU, L + dL \dots \dots \dots (945)$$

$T + dT$ направлено по QB ; $U + dU$ направлено по QC ; направленіе пары имѣющей моментъ $L + dL$ указано двойною стрѣлкою.

Пусть φ есть уголъ наклона касательной въ P къ оси x (взятой произвольно). Тогда:

$d\varphi$ — углу составляемому касательными въ P и Q ,

углу PCQ составляемому нормальми въ P и Q .

Пусть:

$F ds$ —проложеніе на касательную въ P силы, дѣйствующей на PQ ,

$G ds$ —проложеніе на нормаль въ P силы, дѣйствующей на PQ

Равновѣсіе по касательной дастъ:

$$T + (T + dT) \cos (d\varphi) - (U + dU) \sin (d\varphi) + F ds = 0 \dots (946)$$

Равновѣсіе по нормали дасть:

$$- U + (U + dU) \cos (d\varphi) + (T + dT) \sin (d\varphi) + G ds = 0 \quad (947)$$

Равновѣсіе паръ дасть:

$$- L + (L + dL) + (U + dU) ds + \frac{1}{2} G ds \left(\frac{ds}{2} \right) = 0 \quad (948)$$

Въ предѣлѣ эти три уравненія примутъ видъ.

$$\frac{dT}{ds} - \frac{U}{\rho} + F = 0 \quad (949)$$

$$\frac{T}{\rho} + \frac{dU}{ds} + G = 0 \quad (950)$$

$$\frac{dL}{ds} + U = 0 \quad (951)$$

Эти три уравненія (949), (950) и (951) будутъ уравненіями равновѣсія разсматриваемой балки.

Для того чтобы опредѣлить видъ принимаемый балкою подѣ дѣйствіемъ приложенныхъ къ ней силъ, требуется еще одно уравненіе. Проверено опытомъ и доказывается въ теоріи упругости что если

ρ_1 — радіусъ кривизны тонкой балки до сгибанія,

ρ — радіусъ кривизны согнутой балки, то

$$L = K \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \quad (952)$$

гдѣ L имѣетъ то же значеніе какъ и въ уравненіяхъ (949), (950) и (951) K нѣкоторое постоянное, зависящее отъ матеріала, изъ котораго сдѣлана балка.

§ 357. Прямая балка, немного измѣняющая свой видъ, лежащая на нѣсколькихъ опорахъ подѣ дѣйствіемъ собственной тяжести. Тяжелая тонкая балка покоится на нѣсколькихъ опорахъ, расположенныхъ по прямой горизонтальной линіи и немного сгибается подѣ дѣйствіемъ собственной тяжести. Изслѣдовать ея внутреннія напряженія и прогибъ.

Пусть (фиг. 143)

$A, B, B \dots$ точки опоры,

$AB = a; BC = b \dots$,

x — измѣряется отъ B въ направленіи BC ,

y — ордината балки въ точкѣ Q , лежащей между B и C .

ρ — считается положительнымъ въ тѣхъ точкахъ, въ которыхъ согнутая балка обращена вогнутостью вверхъ.

Согласно съ (952) моментъ сгибающей пары равенъ $\frac{k}{\rho}$. Если ρ положительно, то нижняя волокна балки вытянуты, а верхнія сжаты. Слѣдовательно L въ Q дѣйствуетъ на BQ въ сторону противоположную дви-

женію стрѣлки часовъ и на QC' въ сторону движенія стрѣлки часовъ. Пусть сдвигъ въ Q , дѣйствующій на QC , равенъ Γ и его положительное направленіе идетъ по вертикали внизъ. Пусть:

L_2 и U_2 — суть пара и сдвигъ въ точкѣ D бесконечно близкой къ B ,
и лежащей вправо отъ B ,

w — вѣсъ балки на единицу длины,

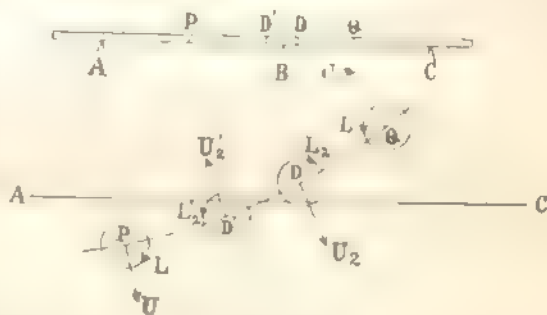
wx — вѣсъ части DQ .

Равновѣсіе моментовъ, дѣйствующихъ на DQ дастъ.

$$\frac{K}{2} = L_2 - \Gamma_2 x - \frac{1}{2} wx^2 \quad \dots (953)$$

Мы полагаемъ, что балка сгибается только немного и что K очень велико; поэтому въ лѣвой части уравненія (953), въ которой K входитъ множителемъ, мы не пренебрегаемъ изгибомъ балки, которымъ пренебрегаемъ въ правой, считая сдвигъ дѣйствующимъ поперекъ вертикально. Поэтому же въ формулѣ

$$\frac{1}{\rho} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$



Фиг. 143.

пренебрегаемъ малою величиною $\frac{dy}{dx}$ такъ какъ балка остается во всѣхъ частяхъ почти горизонтальною, и полагаемъ

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \dots (954)$$

Изъ (953) и (954) имѣемъ:

$$K \frac{d^2y}{dx^2} = L_2 - \Gamma_2 x - \frac{1}{2} wx^2 \quad \dots (955)$$

если x заключается между 0 и b .

Пусть:

L_2', U_2' — пара и сдвигъ въ точкѣ D бесконечно близкой къ B
но лежащей влево отъ B ,

R_2 — давленіе опоры на балку въ B .

Равновѣсіе бесконечно малой части DD' балки дастъ.

$$L_2' - L_2 \quad \dots (956)$$

$$U_2' - U_2 - R_2 \quad \dots (957)$$

Для точки P , лежащей между A и B , такъ что BP отрицательно, имѣемъ подобно (955):

$$K \frac{d^2 y}{dx^2} = L_2' - U_2' x - \frac{1}{2} w x^2 \dots \dots \dots (958)$$

здѣсь x заключается между $x = 0$ и $x = a$.

Наконецъ, обозначая чрезъ U сдвигъ въ какой либо точкѣ балки, согласно съ (951), имѣемъ:

$$U = - \frac{dL}{dx} = K \frac{d^3 y}{dx^3} \dots \dots \dots (959)$$

Интегрируя дважды (955), получимъ:

$$K \frac{dy}{dx} = K\beta + L_2 x - \frac{1}{2} U_2 x^2 - \frac{1}{6} w x^3 \dots \dots \dots (960)$$

гдѣ $\beta =$ уголъ наклоненія балки къ горизонту въ B .

$$K y = K\beta x + \frac{1}{2} L_2 x^2 - \frac{1}{6} U_2 x^3 - \frac{1}{24} w x^4 \dots \dots \dots (961)$$

Въ послѣднемъ интегрированіи постоянное интегрированія = 0, такъ какъ x и y одновременно обращаются въ нуль.

Если $y = 0$ при $x = b$ то изъ (961) получимъ:

$$0 = K\beta + \frac{1}{2} L_2 b - \frac{1}{6} U_2 b^2 - \frac{1}{24} w b^3 \dots \dots \dots (962)$$

Точно такъ же изъ (958) получимъ:

$$0 = K\beta - \frac{1}{2} L_2' a - \frac{1}{6} U_2' a^2 + \frac{1}{24} w a^3 \dots \dots \dots (963)$$

§ 358. Уравненіе трехъ моментовъ. Если L_1 , L_2 , L_3 суть моменты въ опорахъ A , B , C , то равновѣсіе паръ при C и A дастъ:

$$L_3 = L_2 - U_2 b - \frac{1}{2} w b^2 \dots \dots \dots (964)$$

$$L_1 = L_2 + U_2 a - \frac{1}{2} w a^2 \dots \dots \dots (965)$$

Исключая U_2 и U_2' изъ (962), (963), (964) и (965), получимъ:

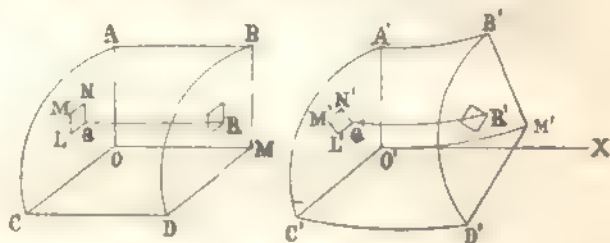
$$L_1 a + 2L_2 (a + b) + L_3 b + \frac{1}{4} w (a^3 + b^3) \dots \dots \dots (966)$$

Это уравненіе, выражающее связь между тремя моментами L_1 , L_2 и L_3 чрезвычайно важно въ инженерномъ дѣлѣ. Оно называется *уравненіемъ трехъ моментовъ*. При помощи его можно, по двумъ даннымъ моментамъ

въ двухъ точкахъ опоры, найти моментъ во всякой точкѣ балки. Затѣмъ изъ (964) и (965) можно найти сдвиги и изъ (957) давления на опоры. Это уравнение (966) трехъ моментовъ особенно важно въ теоріи мостовъ.

§ 359. Теорія балки, согнутой въ дугу окружности большаго радіуса. Однородная прямая тонкая балка согнута безъ растяженія въ дугу окружности, описанной большимъ радіусомъ. Опреѣлить сгибающій моментъ въ каждомъ ея сѣченіи.

Въ основаніи рѣшенія этой задачи положимъ гипотезу, справедливость которой докажется впоследствии тѣмъ, что уравненія равновѣсія окажутся удовлетворенными. Эта гипотеза заключается въ слѣдующемъ: 1) всѣ волокна параллельныя длинѣ балки сгибаются въ дуги окружностей, центры которыхъ лежатъ на одной прямой, которую мы назовемъ *осью сгибанія*, перпендикулярной къ плоскостямъ этихъ дугъ; 2) всякое плоское поперечное сѣченіе остается плоскимъ и въ согнутой балкѣ; 3) всякое такое сѣченіе нормально къ упомянутымъ дугамъ.



Фиг. 144.

Пусть (фиг. 144) $ABCD$ представляетъ собою часть балки ограниченную нормальными сѣченіями AOC и BMD . Примемъ плоскость AOC за плоскость (yz) , какой-нибудь перпендикуляръ къ ней за ось x . Положимъ, что плоскость (x, z) есть плоскость сгибанія, такъ что ось y параллельна оси сгибанія. OA есть ось x ; OC ось y . Пусть QR есть одно изъ продольныхъ волоконъ. Пусть:

(o, y, s) координаты точки Q ,

(x, y, s) координаты точки R .

На фиг. 144 изображена та же часть балки только въ согнутомъ состояніи. Волокна близкія къ $A'B'$ сжаты, нижнія волокна растянуты. Существуетъ, слѣдовательно, такая поверхность, волокна которой не сжаты и не растянуты; она называется *нейтральнымъ слоемъ*, ея продольныя волокна называются *нейтральными*. Согласно нашей гипотезѣ, нейтральный слой есть поверхность круглаго цилиндра, пересекающая плоскость (y, z) по прямой параллельной оси сгибанія, служащей осью этого цилиндра. Положимъ, что начало координатъ взято на нейтральномъ слое: тогда ось x будетъ касательною къ одному изъ нейтральныхъ волоконъ и

$$QR - OM = OM'.$$

Пусть ρ есть радіусъ кривизны нейтральнаго волокна $O'M'$.

Волокно QR , принимая форму $Q'R'$, остается, приблизительно, парал-

Мы видели въ (971), что натяженіе на единицу площади поперечнаго сѣченія выражалось формулою:

$$\frac{Ez}{\rho}$$

Слѣдовательно натяженіе на элементъ $dy dz$ равно

$$\frac{Ez}{\rho} dy dz.$$

Статическій моментъ этого натяженія относительно оси y будетъ слѣдовательно:

$$E \frac{z}{\rho} \cdot x \cdot dy dz.$$

Поэтому сгибающій моментъ въ сѣченіи (y, z) , будетъ:

$$L = \iint E \frac{x^2}{\rho} dy dz$$

или

$$L = \frac{E}{\rho} \iint x^2 dy dz \quad (974)$$

Сравнимъ (974) съ (358) видимъ, что $\iint x^2 dy dz$ есть моментъ инерціи поперечнаго сѣченія балки относительно прямой, по которой оно пересѣкается нейтральнымъ слоемъ (ср. § 168).

Сравнивъ (974) съ (952) и замѣтивъ, что въ натуральномъ состояніи балка была прямая такъ, что $\frac{1}{\rho} = 0$, замѣчаемъ, что постоянное K формулы (952) опредѣляется формулою.

$$K = EJ, \quad (975)$$

гдѣ J упомянутый моментъ инерціи.

Моментъ L уравнивается моментомъ относительно $D'M'$, потому что $D'M'$ параллельна оси y .

Статическій моментъ относительно оси z , происходящій отъ натяженій, въ поперечномъ сѣченіи (y, z) , равенъ:

$$\frac{E}{\rho} \iint yz dy dz \quad (976)$$

Этотъ моментъ не можетъ быть уравновѣшенъ моментомъ относительно $M'B$, такъ какъ $M'B$ не параллельна оси z . Слѣдовательно, для равновѣсія необходимо, чтобы:

$$\iint yz dy dz = 0.$$

Значитъ плоскость x, z сгибанія должна быть перпендикулярна къ одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи поперечнаго сѣченія.

§ 360. **Лукъ согнутый тетивою.** Представимъ себѣ однородную цилиндрическую нерастяжимую палку согнутую подъ вліяніемъ стягивающей нѣмного ея концы нити (тетивы). Изслѣдуемъ ея сгибавіе тетивою.

Примемъ (фиг. 145) тетиву за ось x . Обозначимъ черезъ T натяженіе тетивы. Сгибающій моментъ L , согласно съ (952),

$$L = \frac{K}{\rho} \quad (977)$$

потому что $\frac{1}{\rho} = 0$, такъ какъ палка, до сгибанія, была прямою. Согласно съ (954), уравненіе (977) принимаетъ видъ:

$$L = \pm K \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (978)$$

Но изъ условій задачи и чертежа видно, что,

$$L = Ty \quad (979)$$

Изъ (978) и (979) имѣемъ:

$$\pm K \frac{d^2 y}{dx^2} = Ty \quad (980)$$

Положимъ (фиг. 145), что A и B суть концы палки, C точка, въ которой касательная параллельна тетивѣ. Примемъ OC за ось y .

Замѣтимъ, что $\frac{dy}{dx} = 0$ при $x = 0$; затѣмъ $\frac{dy}{dx}$ уменьшается съ увеличеніемъ x , слѣдовательно $\frac{d^2 y}{dx^2}$ отрицательна. Поэтому въ (980) надо удержатъ нижній знакъ. Получимъ:

$$- K \frac{d^2 y}{dx^2} = Ty \quad (981)$$

T есть величина постоянная (натяженіе тетивы). Положимъ, для удобства $T = Kn^2$:

$$T = Kn^2 \quad (982)$$

Тогда (981) приметъ видъ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 y \quad (983)$$

Таково дифференціальное уравненіе кривой, форму которой принимаетъ палка лука. Интегралъ этого уравненія будетъ.

$$y = h \cos (nx), \quad (984)$$

Вотъ конечное уравненіе кривой, по которой согнуть лукъ. При $x = 0$ это уравненіе (984) даетъ $y = h$. Слѣдовательно:

$$h = OC$$

h есть, слѣдовательно, разстояніе тетивы отъ наиболее удаленной отъ нея точки лука.

Уравнение (984) показываетъ, что дугъ можетъ имѣть одну изъ формъ:

$$ACB; ACBB'; A'ACBB' \dots \text{ (фиг. 145).}$$

Предполагая, что длина $2l$ дуга почти равна длинѣ тетивы $2a$, такъ что $a = l$. Тогда $y = 0$ при $x = a$ но это можетъ быть, согласно (984), если

$$na = \frac{1}{2} \pi (2m + 1),$$

гдѣ m цѣлое число.

Поэтому, согласно съ (982):

$$T = \frac{\pi \cdot K}{4a^2} (2m + 1)^2 \dots \dots \dots (985)$$

или, на основаніи (975):

$$T = \frac{\pi \cdot EJ}{4a^2} (2m + 1)^2 \dots \dots \dots (986)$$

§ 361. Тонкій вертикальный столбъ. Формулы предыдущаго параграфа приложимы къ изслѣдованію сгибанія столба подѣ дѣйствиемъ груза.

Такъ какъ $y = 0$ при $x = a$, то или

$$na = \frac{1}{2} \pi (2m + 1)$$

или

$$h = 0.$$

Формула (986) показываетъ, что сгибаніе столба произойдетъ только тогда, если нагрузка T будетъ равна.

$$\frac{\pi \cdot EJ}{4a^2} (2m + 1)^2, \dots \dots \dots (987)$$

гдѣ a длина столба.

Если нагрузка будетъ меньше (мы пренебрегаемъ вѣсомъ столба), то $h = 0$ и, согласно съ (984), $y = 0$, то есть сгибаніе не произойдетъ. Если нагрузка будетъ больше чѣмъ $\frac{\pi^2 EJ}{4a^2} (2m + 1)^2$, то отклоненіе столба будетъ столь велико, что нельзя уже будетъ пренебречь членомъ $\frac{dy}{dx}$ въ выраженіи;

$$1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

и придется произвести изслѣдованіе болѣе точное. Но, и не производя его, мы видимъ, что столбъ начинаетъ сгибаться только, когда нагрузка достигнетъ величины $\frac{\pi^2 EJ}{4a^2} (2m + 1)^2$.

Припоминая формулу (373) видимъ, что сгибающая нагрузка для круглаго цилиндрическаго столба пропорціональна 4-й степени его діаметра и обратно пропорціональна квадрату его высоты a (законъ Эйлера).

§ 362. Работа сгибающего момента L при сгибании элемента ds . Найдемъ работу производимую моментомъ L , когда при сгибании балки, кривизна $\frac{1}{\rho_1}$ обращается въ $\frac{1}{\rho_2}$. Пусть

$PQ = ds$ элементъ нейтральной линии,

ϕ уголъ, составляемый касательными, проведенными въ концахъ элемента PQ въ какой-нибудь моментъ,

ρ — радиусъ кривизны элемента,

ψ уголъ, составляемый касательными, проведенными въ концахъ элемента PQ до сгибания.

По формулѣ (952), имѣемъ:

$$L = K \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) = K \frac{d\phi}{ds} \quad . \quad . \quad . \quad (988)$$

Работа момента L при измѣненіи угла ϕ на $d\phi$ равна $L d\phi$. Здѣсь знакъ () взять потому, что L принимаемъ положительнымъ когда онъ дѣйствуетъ въ сторону уменьшенія угла ϕ . Следовательно полная работа момента L при измѣненіи угла ϕ отъ ϕ_1 до ϕ_2 равна:

$$W ds = \frac{1}{2} K \left(\phi_2^2 - \phi_1^2 \right) \quad . \quad . \quad . \quad (989)$$

или

$$W ds = -\frac{1}{2} K \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)^2 ds = -\frac{L^2 ds}{2K} \quad . \quad . \quad . \quad (990)$$

ГЛАВА III.

Крученіе.

§ 363. Чѣмъ измѣняется крученіе. Извѣстно, что къ кривой въ пространствѣ можно провести, въ каждой изъ ея точекъ, безчисленное множество нормалей; всѣ онѣ лежатъ въ нормальной плоскости, та изъ нихъ, которая находится и въ нормальной плоскости и въ плоскости соприкосновения называется главной нормалью. Положимъ, что PQ есть одна изъ нормалей, проведенныхъ въ точкѣ P къ центральной линіи упругаго стержня. Самый стержень мы представляемъ себѣ тѣломъ, геометрическое образованіе котораго получается отъ движенія небольшой площади, ограниченной какимъ-нибудь замкнутымъ контуромъ; при чемъ центръ тяжести этой площади описываетъ кривую, называемую центральной линіей, и плоскость движущейся площади остается нормальной къ центральной линіи. Положимъ, что Q лежитъ на боковой поверхности стержня. Прямая PQ называется трансверсомъ. Итакъ трансверсъ PQ есть прямолинейный отрѣзокъ нормальный къ центральной линіи и ограниченный пересѣче-

няемъ его P съ центральной линіею и пересѣченіемъ его Q съ боковою поверхностью стержня.

Положимъ, что $P, P', P'' \dots$ суть послѣдовательныя безконечно близкія одна отъ другой точки центральной линіи.

За трансверсъ точки P мы принимаемъ пересѣченіе $P'Q'$ нормальной плоскости въ P' съ плоскостью QPP . За трансверсъ точки P' мы принимаемъ пересѣченіе $P''Q''$ нормальной плоскости точки P' съ плоскостью $Q'P'P''$, и такъ далѣе.

Если стержень въ натуральномъ состояніи представляетъ собою прямой цилиндръ, то можно такъ выбрать трансверсы послѣдовательныхъ точекъ центральной линіи, чтобы они образовали при натуральномъ состояніи стержня плоскость, проходящую чрезъ его центральную прямую, такъ что $QQ'Q'' \dots$ расположены по прямой. Положимъ, что эти трансверсы неизмѣнимо соединены съ материальными точками стержня, чрезъ которыя они проходятъ.

Закрѣпимъ поперечное сѣченіе, проходящее чрезъ P и положимъ что элементы стержня, лежащіе между нормальными сѣченіями, проходящими чрезъ P, P', P'', \dots скручены немного соотвѣтственно около касательныхъ $PP', P'P'', \dots$ такъ, что $Q, Q', Q'' \dots$ располагаются уже на спиральной линіи.

Кручение элемента стержня наблюдаемое между нормальными сѣченіями, проходящими чрезъ P и P' измѣряется безконечно малымъ угломъ составленнымъ трансверсою $P'Q'$ съ плоскостью QPP , равнымъ углу между плоскостями QPP и $PP'Q'$.

Если ds есть элементъ дуги центральной линіи, $d\theta$ уголъ между плоскостями QPP и $PP'Q'$, то кручение отнесенное къ 1 длины будетъ:

$$\text{Кручение} = \frac{d\theta}{ds} \dots \dots \dots (991)$$

§ 364. Проложенія кривизны. Положимъ, что стержень такъ согнуть, что центральная линія представляетъ собою кривую двойной кривизны. Если $d\epsilon$ есть уголъ, составленный нормальными плоскостями къ центральной линіи, проведенныя въ точкахъ P и P' , то полная кривизна центральной линіи въ точкѣ P измѣряется отношеніемъ:

$$\frac{d\epsilon}{ds} \dots \dots \dots (992)$$

и говорятъ, что центральная линія имѣетъ эту кривизну въ плоскости соприкосновенія.

Положимъ, что нормальныя плоскости, проведенныя въ точкахъ P и P' пересѣкаются по прямой (CO (фиг. 146) и что CO пересѣкаетъ плоскость соприкосновенія, проходящую чрезъ P и P' въ точкѣ C . Тогда PC и $P'C$ суть двѣ соедѣля главныя нормали; точка же C есть центръ кривизны, такъ что:

$$CP = \rho \dots \dots \dots (993)$$

Проведемъ чрезъ касательную PP' плоскость $PP'M$ составляющую какой-нибудь уголъ φ съ плоскостью соприкосновения $PP'C$. Тогда PM и $P'M$ суть сосѣднія нормали (не главныя) и M есть центръ круга кривизны, лежащаго въ плоскости $PP'M$. Называя R радиусъ этого круга имѣемъ:



Фиг. 146.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} \cos \varphi \quad (994)$$

Такимъ образомъ мы можемъ говорить о кривизнѣ $\frac{1}{R}$ центральной линіи въ любой плоскости $PP'M$ и опредѣлять ее чрезъ кривизну $\frac{1}{\rho}$ въ

плоскости соприкосновения помощью формулы (994). Мы будемъ называть $\frac{1}{\rho}$ кривизною, а $\frac{1}{R}$ проложеніемъ кривизны на плоскость $PP'M$.

§ 365. Подвижная система координатъ для изслѣдованія крученія. Проведемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости $P'PQ$ и $P'PL$ чрезъ касательную PP' (фиг. 147). Пусть q и λ суть проложенія кривизны на эти плоскости. Тогда кривизна въ плоскости соприкосновения равна:



Фиг. 147.

$$\sqrt{q^2 + \lambda^2} = \frac{1}{\rho} \quad (995)$$

Уголъ, составляемый плоскостью $P'PL$ съ плоскостью соприкосновения таковъ, что тангенсъ его равенъ $\frac{\lambda}{q}$, потому что, согласно съ (994),

$$q = \sqrt{q^2 + \lambda^2} \cos \varphi$$

откуда

$$\tan \varphi = \frac{\lambda}{q} \quad (996)$$

Прямая PQ , PL и PP' могутъ быть приняты за оси координатъ, и мы будемъ имѣть дѣло съ тремя величинами:

- q — кривизна въ плоскости $P'PL$ перпендикулярной къ PQ ,
- λ — кривизна въ плоскости $P'PQ$ перпендикулярной къ PL ,
- τ — крученіе около PP' .

При переходѣ изъ точки P въ точку P' оси PQ , PL , PP' могутъ быть перемѣщены въ положеніе $P'Q$, $P'L$, $P'P'$, помощью вращеній qps , λds , τds около осей PQ , PL , PP' и поступательнаго перемѣщенія начала координатъ изъ P въ P' .

§ 366. Соотношенія между напряженіями и деформациями. Напряженія, которыми дѣйствуетъ часть стержня, лежащая по одну сторону P , на другую его часть приводятся къ силѣ и парѣ. Положимъ, что составляющія этой пары по осямъ координатъ PL , PQ и PP' суть K , L , T , тогда какъ q , λ , τ кривизны въ плоскостяхъ $P'PL$, $P'PQ$ и крученіе, если

первоначально стержень былъ прямымъ. Если стержень первоначально былъ кривымъ, то q , λ , τ суть измѣненія въ кривизнахъ и кручении.

Не желая вдаваться въ теорію упругости, примемъ гипотезу состоящую въ томъ, что:

1) Измѣненія въ кручении и кривизнѣ стержня вблизи отъ P зависятъ только отъ пары (K, L, T) и не зависятъ отъ равнодѣйствующей силы.

2) K, L, T суть линейныя функціи отъ q, λ, τ .

Пусть Wds есть работа напряженій въ элементѣ $ds = PP'$. Если, при неподвижности поперечнаго сѣченія проходящаго чрезъ P , кривизна λ обратилась въ $\lambda + d\lambda$, при чемъ q и τ остались безъ измѣненія, то элементъ ds повернулся около оси пары L на уголъ $d\lambda ds$ и работа момента L равна $Ld\lambda ds$, тогда какъ работы моментовъ K и T равны нулю. При этомъ, слѣдовательно $dW \cdot ds = Ld\lambda \cdot ds$. Такія же выраженія получимъ для K и T если q и τ увеличились на dq и $d\tau$. Такъ что:

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{dW}{dq} \\ L &= \frac{dW}{d\lambda} \\ T &= \frac{dW}{d\tau} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (997)$$

Если, по нашей гипотезѣ, K, L, T суть линейныя функціи отъ q, λ, τ , то (997) показываютъ, что W есть квадратная функція отъ q, λ, τ . Поэтому, вводя новыя буквы для обозначенія коэффициентовъ, получимъ:

$$W = \frac{1}{2} (Ak^2 + B\lambda^2 + C\tau^2 + 2a \cdot \lambda\tau + 2b \cdot \tau q + 2c \cdot q\lambda) \quad (998)$$

Отсюда, согласно съ (997), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} K &= Aq + c\lambda + b\tau \\ L &= cq + B\lambda + a\tau \\ T &= bq + a\lambda + C\tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (999)$$

Перемѣною осей координатъ можно всегда достигнуть того, что однородная квадратичная функція, въ которой по (998) выражается W , не будетъ содержать произведеній переменныхъ. Слѣдовательно можно выбрать координаты такъ, чтобы:

$$W = \frac{1}{2} (A_1q_1^2 + B_1\lambda_1^2 + C_1\tau_1^2) \dots \dots \dots (1000)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= A_1q_1 \\ L_1 &= B_1\lambda_1 \\ T_1 &= C_1\tau_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1001)$$

*) Линейное функціи называется алгебраическая функція перваго порядка.

Если A и B суть главные коэффициенты сгибания и кручения, то

$$K = Aq = \text{момент сгибания около } Py \dots (1002)$$

$$T = Ct = \text{кручение около } Pz \dots (1003)$$

суть моменты паръ напряженій въ P .

Эти моменты могутъ быть разложены по образующей PR и параллельно плоскости (X, Y) .

Слагающія параллельныя плоскости (X, Y) вмѣстѣ съ введенною парю Ra должны уравновѣшивать собою соответствующія слагающія въ свободномъ концѣ S стержня. Но ось равнодѣйствующей пары въ P составляетъ постоянный уголъ съ OM при перемѣщеніи точки P по винтовой линіи. Поэтому ея направленіе измѣняется съ перемѣщеніемъ точки P , тогда какъ ось пары въ S неподвижна. Следовательно слагающіе моменты направленные параллельно плоскости (X, Y) должны быть равны нулю. Итакъ: моменты пары въ точкѣ P должны быть направлены параллельно оси цилиндра. Такъ будетъ при всѣхъ положеніяхъ точки P на винтовой линіи. Следовательно *опорный сжатіи, соизмѣняющійся по винтовой линіи и вызывающій равномерное крученіе, можетъ быть поддержанъ въ этомъ видѣ силою R и парю G , приложенными къ свободному концу, если сила R направлена параллельно оси цилиндра, несущую эту винтовую линію, а пара действуетъ въ плоскости перпендикулярной къ R (моментъ ея G направленъ по R).*

Если α есть уголъ, составляемый касательною къ винтовой линіи съ основаніемъ винта, то (1002) и (1003) дадутъ

$$Ra = -Aq \sin \alpha + Ct \cos \alpha \dots (1004)$$

$$G = Aq \cos \alpha + Ct \sin \alpha \dots (1005)$$

Эти уравненія дадутъ искомыя силу R и моментъ G пары по заданнымъ: углу α касательной винтовой линіи съ основаніемъ цилиндра, кривизнѣ q винтовой линіи и крученію — материала стержня.

§ 368. Спиральныя пружины. Первоначальный видъ толкаго однороднаго стержня или проволоки въ натуральномъ состояніи есть давная винтовая линія. Проволока эта деформирована въ другую данную винтовую линію. Найдемъ силу R и моментъ G пары, которыя должны быть приложены къ свободному концу проволоки для того, чтобы удержать ее въ этомъ деформированномъ видѣ, если другой ея конецъ закрѣпить неподвижно. Пусть: a_1 — радиусъ цилиндра, на которомъ лежитъ пружина въ натуральномъ видѣ,

a — радиусъ цилиндра, на которомъ лежитъ пружина въ деформированномъ видѣ,

α_1 — уголъ наклона касательной къ основанію цилиндра до деформациі,

α — уголъ наклона касательной къ основанію цилиндра послѣ деформациі,

- P, P' . . . послѣдовательныя точки винтовой линіи до деформации,
 P^x, P'^x . . . главные нормали этихъ точекъ,
 P^η, P'^η . . . бинормали этихъ точекъ,
 P^ζ, P'^ζ . . . касательныя этихъ точекъ,
 P_x — главная нормаль деформированной спирали.
 P_y — бинормаль деформированной спирали.
 P_z — касательная деформированной спирали.

Совпадающія оси спиралей (цилиндровъ, на которыхъ онѣ лежатъ) примемъ за ось Z , и какую-нибудь перпендикулярную къ ней плоскости за плоскость (X, Y) .

Двѣ послѣдовательныя плоскости соприкосновения въ спирали до деформации $\{P'P''\}$ и $\{P'P'^{\prime\prime}\}$ образуютъ уголъ:

$$\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1 \cdot ds}{a_1}$$

Напряженія въ P состоятъ изъ:

силы, которая можетъ быть разложена по образующей и параллельно (X, Y) .

пары C ($\tau - \tau_1$) около оси P_x ,

пары Aq около P_y ,

пары — Aq_1 около P_η ,

при чемъ:

$$\tau_1 = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1} \dots \dots \dots (1006)$$

$$q_1 = \frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1} \dots \dots \dots (1007)$$

$$q = \frac{\cos^2 \alpha}{a} \dots \dots \dots (1008)$$

гдѣ τds уголъ между плоскостями $\{P'P''\}$ и $\{P'P'^{\prime\prime}\}$.

Точно такъ же какъ и въ предыдущемъ параграфѣ можно доказать, что слагающія силы параллельная (X, Y) равна нулю. Остается сила, направленная по образующей, которая можетъ быть перенесена на ось, если добавить пару Ra .

Точно такъ же какъ и въ предыдущемъ параграфѣ можно доказать, что проложеніе равнодѣйствующей пары параллельное (X, Y) равно нулю. Приравняемъ, поэтому, нулю моментъ по P_x . Назовемъ чрезъ φ уголъ $\{P_x\}$. Ось P_x , перпендикулярная къ P_y, P_z и къ моменту Ra , образуетъ съ P_η уголъ $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Поэтому:

$$k_1 \sin \varphi = 0 \dots \dots \dots (1009)$$

Но k_1 не равно нулю, поэтому $\varphi = 0$. Слѣдовательно P^x и P_x совпадаютъ и моменты Ak и $-Ak$, лежатъ на одной прямой P_y , то есть на бинормали деформированной винтовой линіи. Поэтому уголъ τds равенъ углу, составляемому послѣдовательными плоскостями соприкосновения

деформированной винтовой линии, такъ что.

$$\tau = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{a} \dots \dots \dots (1010)$$

Приравнивая нулю моментъ, направленный по перпендикуляру къ плоскости, проходящей чрезъ Px и образующую, получимъ:

$$Ra = A \sin \alpha \cdot (k - k_1) + C \cos \alpha \cdot (\tau - \tau_1) \dots (1011)$$

Приравнивая моментъ въ P , направленный по образующей къ соответственному моменту G въ концѣ проволоки, получимъ:

$$G = A \cos \alpha \cdot (k - k_1) + C \sin \alpha \cdot (\tau - \tau_1) \dots (1012)$$

При этомъ:

$$k_1 = \frac{\cos^2 \alpha_1}{a_1}; \quad k = \frac{\cos^2 \alpha}{a}; \quad \tau_1 = \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1}{a_1}; \quad \tau = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{a} \dots (1013)$$

Если пружина имѣетъ много оборотовъ, такъ что α и α_1 малы, то, пренебрегая малыми величинами 2-го порядка, получимъ:

$$Ra = - A \alpha \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} \right) + C \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha_1}{a_1} \right) \dots (1014)$$

$$G = A \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1} \right) \dots \dots \dots (1015)$$

Если на конецъ S пружины дѣйствуетъ только сила, такъ что $G = 0$, то изъ (1015) имѣемъ $a = a_1$, то есть, значить, диаметръ цилиндра пружины не измѣняется. Въ этомъ случаѣ (1014) даетъ:

$$Ra = C \frac{\alpha - \alpha_1}{a} \dots \dots \dots (1016)$$

Формула (1016) заключающая только коэффициентъ C выражаетъ слѣдующее:

Теорема Бине: *Спиральная пружина, имѣющая видъ винтовой линіи съ большимъ числомъ оборотовъ, сопротивляется сжатию по оси ея цилиндра только крученіемъ, а не сгибаніемъ.*

Если l длина такой пружины, h удлинение высоты ея цилиндра, производимое силою R направленною параллельно этой оси, то:

$$l \sin \alpha - l \sin \alpha_1 = h \dots \dots \dots (1017)$$

Полагая синусы равными угламъ (по ихъ малости) и пользуясь формулою (1016) и (1017) получимъ:

$$R = C \frac{h}{la^2} \dots \dots \dots (1018)$$

Эта формула (1018) опредѣляетъ силу R , потребную для произведенія удлиненія h высоты цилиндра, или ея укороченія, при надавливаніи, напримѣръ, гладкою доскою на свободный конецъ пружины.

ОТДѢЛЪ IX.

Основанія графической статики.

§ 369. Многоугольникъ силъ. Даны величины и направленія силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло въ одной плоскости. Найти графическимъ путемъ ихъ равнодѣйствующую.

Обращаемъ вниманіе читателя на то, что въ этой задачѣ точки приложенія заданныхъ силъ не даны.

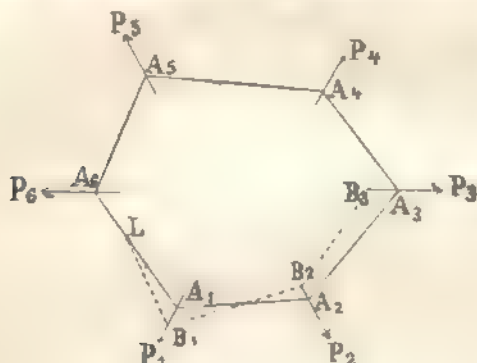
Пусть (фиг. 149) направленія и величины заданныхъ силъ изображены векторами P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 . Начиная отъ какой-нибудь произвольной точки той же плоскости откладываемъ послѣдовательно прямыя равныя и параллельныя этимъ силамъ (фиг. 149), отиѣчая эти прямыя соответственными цифрами, такъ что 1 параллельна P_1 , 2 параллельна P_2 , и такъ далѣе. Получимъ многоугольникъ, состоящій изъ сторонъ 1, 2, 3, 4, 5.

Согласно съ § 65 замыкающая сторона 6 этого многоугольника представитъ собою силу, уравнивающую заданныя силы. Сила равная этой силѣ 6 и противоположная и будетъ искомою равнодѣйствующею. Если бы заданныя силы находились въ равновѣсш, то многоугольникъ 1, 2, 3, 4, 5 замкнулся бы безъ стороны 6, потому что равнодѣйствующая была бы равна нулю.

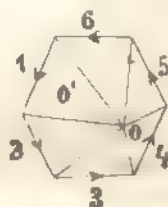
§ 370 Веревоочный многоугольникъ. Построеніемъ предыдущаго параграфа мы нашли величину и направленіе равнодѣйствующей, но не нашли точку ея приложенія, и точки приложенія заданныхъ силъ тоже остались неопредѣленными. Чтобы опредѣлить всѣ точки приложенія силъ достраиваютъ фигуру, на которой были заданы силы слѣдующимъ образомъ

помощью полученнаго многоугольника силъ. Пусть (фиг. 150) изображаетъ заданныя силы, а (фиг. 151) многоугольникъ силъ.

Возьмемъ какую-нибудь произвольную точку O на фигурѣ многоугольника силъ. Назовемъ эту точку O полюсомъ и соединимъ ее со всѣми вершинами многоугольника силъ прямыми. Вершину, находящуюся въ пересѣченіи сторонъ 1 и 2 будемъ обозначать такъ 12; вершину находящуюся въ пересѣченіи сторонъ 2 и 3, будемъ обозначать такъ 23, и такъ далѣе. Радіусъ-векторъ, соединяющій O съ вершиною 1 2, будемъ обозначать такъ 12; радіусъ-векторъ, соединяющій O съ вершиною 2 3, будемъ обозначать такъ 23, и такъ далѣе. Эти радіусы-векторы называются *полярными радіусами*.



Черт. 150.



Черт. 151.

Радіусы-векторы, соединяющіе O съ вершинами, разбиваютъ многоугольникъ силъ на нѣсколько треугольниковъ. Каждый изъ этихъ треугольниковъ можетъ быть разсматриваемъ какъ треугольникъ силъ. Такъ напри- мѣръ полярный радіусъ 23, *направленный къ O* уравниваетъ силу 2 и силу, изображенную полярнымъ радіусомъ 12 *направленнымъ изъ O* ; полярный радіусъ 31 *направленный къ O* уравниваетъ силу 3 и силу, изображенную полярнымъ радіусомъ 23 *направленнымъ изъ O* . Полярный радіусъ 23 считается въ одномъ изъ этихъ сосѣднихъ треугольниковъ *направленнымъ въ одну сторону*, а въ другомъ — въ другую. Тоже самое будетъ со всѣми полярными радіусами: каждый изъ нихъ считается въ одномъ треугольникѣ *направленнымъ къ O* , а въ другомъ *направленнымъ изъ O* ; каждый изъ нихъ представляетъ собою двѣ равныя и противоположныя силы. Поэтому мы и не ставимъ на нихъ цифръ на фигурѣ.

Теперь будемъ достраивать чертежъ (фиг. 150). Изъ какой-нибудь произвольной точки L проводимъ L, A_1 параллельно полярному радіусу 61 (фиг. 151) до пересѣченія A_1 съ направлениемъ силы P_1 . Изъ A_1 проводимъ прямую A_1, A_2 параллельную полярному радіусу 12 до пересѣченія A_2 съ направлениемъ силы P_2 . Изъ A_2 проводимъ A_2, A_3 параллельную полярному радіусу 23 до пересѣченія A_3 съ направлениемъ силы P_3 , и такъ далѣе. Наконецъ изъ A_5 проводимъ прямую A_5, A_6 парал-

дельную полярному радиусу 56 до пересѣченія A_6 съ прямою A_1I . Тогда A_6 и есть искомая точка приложенія равнодѣйствующей, какъ это сейчасъ будетъ доказано. Замѣтимъ только, предварительно, что многоугольникъ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_6$ называется *веревочнымъ многоугольникомъ*.

Для доказательства того, что A_6 есть точка приложенія равнодѣйствующей силъ P_1, P_2, \dots, P_6 , замѣтимъ слѣдующее. Сила P_1 , приложенная въ A_1 , разлагается однимъ изъ треугольниковъ многоугольника силъ на силу направленную по LA_1 и на силу по A_1A_2 . Сила по A_2A_3 , A_1 съ силою P_2 эквивалентна (по многоугольнику силъ) силѣ по A_3, A_2 . Сила по A_4, A_2 съ силою P_3 эквивалентна силѣ по A_4, A_3 , и такъ далѣе. Такимъ образомъ оказывается, что заданныя силы P_1, P_2, \dots, P_6 эквивалентны двумъ силамъ: одна изъ нихъ направлена по LA_1 , другая — по A_6A_5 . Слѣдовательно пересѣченіе A_6 этихъ двухъ силъ и есть точка приложенія равнодѣйствующихъ всѣхъ силъ, что и требовалось доказать.

Проведя чрезъ A_6 прямую P_6 равную и параллельную сторонѣ 6 многоугольника силъ, видимъ, что P_6 изображаетъ силу, уравновѣшивающую заданныя силы P_1, P_2, \dots, P_6 , приложенныя въ A_1, A_2, \dots, A_6 иолнѣ, то есть по величинѣ, по направленію и по положенію.

Но каждая изъ заданныхъ силъ можетъ считаться приложенною въ любой точкѣ прямой, по которой она направлена. Поэтому задача можетъ имѣть нѣсколько рѣшеній. Этотъ произволъ и отражается на произвольномъ выборѣ точки L , отъ которой мы начинаемъ строить веревочный многоугольникъ. Однако, при данномъ выборѣ точки L уже опредѣляются точки приложенія всѣхъ силъ и заданныхъ и искомой равнодѣйствующей. Всѣ точки приложенія оказываются въ вершинахъ веревочнаго многоугольника.

Еслибы мы выбрали другую точку L , то получили бы другой веревочный многоугольникъ, стороны котораго были бы параллельны сторонамъ прежняго веревочнаго многоугольника, потому что онѣ были бы проведены параллельно тѣмъ же полярнымъ радиусамъ многоугольника силъ. Получилась бы и другая точка приложенія равнодѣйствующей; но она всетаки лежала-бы, конечно, на той же прямой P_6 .

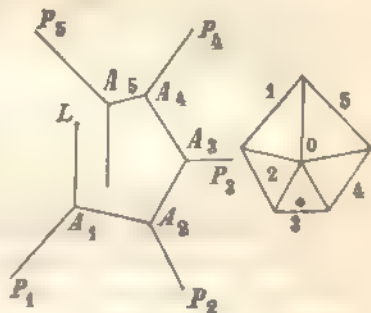
Еслибы мы выбрали другой полюсъ O , то получили бы опять другой веревочный многоугольникъ, стороны котораго уже не были бы параллельны сторонамъ прежняго веревочнаго многоугольника, потому что теперь были бы уже другіе полярные радиусы въ многоугольникѣ силъ. Но всетаки направленіе равнодѣйствующей осталось бы прежнимъ и точка ея приложенія была бы на прямой по которой она направлена. Отсюда геометрическая теорема: для всѣхъ полюсовъ O многоугольника силъ геометрическое мѣсто послѣдней вершины A , веревочнаго многоугольника есть прямая (по которой направлена равнодѣйствующая P_6).

Многоугольникъ A_1, A_2, \dots, A_6, A называется *веревочнымъ* потому, что подъ влияніемъ силъ P_1, P_2, \dots, P_6 , приложенныхъ къ его вершинамъ, находился

бы въ равновѣсіи такой многоугольникъ, составленный изъ веревокъ: $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_6, A_6A_1$, такъ какъ именно равныя и противоположныя силы, представляемыя полярными радіусами многоугольника силъ, были бы натяженіями соотвѣтственныхъ веревокъ, и эти натяженія вмѣстѣ съ силами P_1, P_2, \dots, P_6 уравнивались бы, какъ это показываетъ многоугольникъ силъ.

§ 371. **Графическія условія равновѣсія.** Изъ предыдущаго параграфа мы видимъ, что, если многоугольникъ силъ 1, 2, 3, 4, 5 не замкнуть, то существуетъ равнодѣйствующая 6 заданныхъ силъ *).

Посмотримъ, что будетъ если многоугольникъ 1, 2, 3, 4, 5 заданныхъ силъ самъ собою окажется замкнутымъ. Строя веревочный многоугольникъ по многоугольнику силъ дойдемъ до точки A_6 и заданной уже силы P_6 . Для заключенія построения останется провести изъ A_6 прямую параллельную полярному радіусу 51. Если эта прямая совпадаетъ съ прямою LA_1 , то вся система, приведенная къ силамъ направленнымъ по этимъ прямымъ въ противоположныя стороны и равнымъ по разности одному и тому же полярному радіусу 51, будетъ въ равновѣсіи. Такое равновѣсіе 6-ти силъ начертано на (фиг. 150).



Черт. 152.

Если же прямая, проведенная изъ A_6 параллельно полярному радіусу 51 не совпадетъ съ прямою LA_1 , какъ это изображено на (фиг. 152), то равныя и параллельныя, но противоположныя силы, направленные по этимъ прямымъ, дадутъ пару силъ, къ которой, въ этомъ случаѣ, и приводится, слѣдовательно, вся система заданныхъ силъ. Она, значить, не можетъ быть приведена къ равнодѣйствующей силѣ, а приводится къ парѣ. Въ этомъ случаѣ веревочный многоугольникъ не замкнутъ. Моментъ этой пары равенъ произведенію силы равной полярному радіусу 51 на расстояние между прямою проведенною изъ A_6 параллельно 51 и прямою LA_1 .

§ 372. **Многоугольникъ параллельныхъ силъ.** Если заданныя силы параллельны между собою, то многоугольникъ силъ обращается въ прямую линію. Напримѣръ, если заданы силы P_1, P_2, P_3 (фиг. 153) и мы начнемъ строить многоугольникъ силъ (фиг. 154) начиная отъ точки a , то получимъ прямую ab , на которой будутъ лежать стороны:

$$1 = P_1, \quad 2 = P_2, \quad 3 = P_3.$$

*) Само собою разумѣется, что наши построения и разсужденія приложенныя къ 5-ти заданнымъ силамъ распространяются на какое угодно число заданныхъ силъ.

Рѣшимъ слѣдующую задачу. Даны длины нитей A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , грузы P_1, P_2, P_3 подвѣшенные въ точкахъ A_1 , A_2 , A_3 . Найти одно изъ расположений, принимаемое нитями въ равновѣсїи и напряженія нитей.

Изъ сказаннаго въ §§ 370 и 371 слѣдуетъ такое построение:

Чертимъ многоугольникъ силъ. Для этого отъ какой-нибудь точки a (фиг. 154) проводимъ прямую параллельную силамъ P_1, P_2, P_3 и на ней откладываемъ послѣдовательно стороны:

$$1 = P_1; \quad 2 = P_2; \quad 3 = P_3.$$

такъ что

$$1 + 2 + 3 = ab.$$

Изберемъ какой нибудь полюсъ O .

Теперь строимъ веревочный многоугольникъ (фиг. 153).

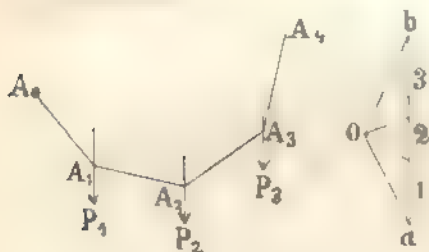
Проводимъ изъ A_0 прямую A_0A_1 параллельную полярному радіусу Oa ; изъ A_1 проводимъ прямую A_1A_2 параллельную полярному радіусу 12 ; изъ A_2 проводимъ прямую A_2A_3 параллельную полярному радіусу 23 ; изъ A_3 проводимъ A_3A_4 параллельно Ob .

Данный веревочный многоугольникъ будетъ имѣть видъ построеннаго многоугольника $A_0A_1A_2A_3A_4$.

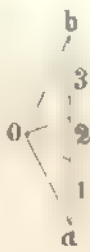
Полярные радіусы будутъ равны вѣзвѣшеніямъ параллельныхъ имъ нитей.

§ 373. Опредѣленіе давленій, производимыхъ прямою горизонтальною балкою на точки опоры. Положимъ (фиг. 155), что прямая легкая балка (въсомъ которой можно пренебречь) лежитъ горизонтально на точкахъ опоры A_1 и A_2 . На балку дѣйствуютъ въ точкахъ A_1, A_2, A_3, A_4 тяжелые грузы W_1, W_2, W_3, W_4 . Найти давленія въ точкахъ опоры.

Изъ предыдущихъ параграфовъ настоящей главы вытекаетъ слѣдующее построение. Отъ какой-нибудь точки a диаграммы силъ (фиг. 156) проводимъ прямую параллельную вертикалямъ W_1, W_2, W_3, W_4 и на ней откладываемъ послѣдовательно $1 = W_1; 2 = W_2; 3 = W_3$ и $4 = W_4$, такъ что ab представляетъ собою полную нагрузку балки. Избираемъ произвольно полюсъ O и соединяемъ его съ точками $a, 12, 23, 34, b$. Строимъ, начиная отъ A_0 , веревочный многоугольникъ. Для этого проводимъ прямую A_0B_1 параллельную полярному радіусу ao до пересѣченія B_1 съ вертикалью A_1W_1 ; проводимъ изъ B_1 прямую B_1B_2 параллельную полярному радіусу 12 до пересѣченія B_2 съ вертикалью A_2W_2 , и такъ далѣе. Наконецъ проводимъ изъ B_4 прямую B_4B_5 параллельную полярному ра-

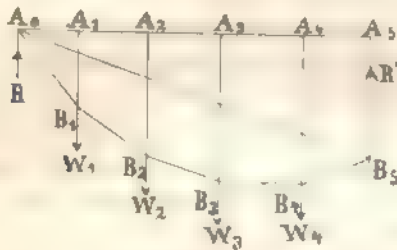


Черт. 153.

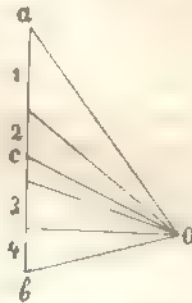


Черт. 154.

діусу bO . Получаемъ веревочный многоугольникъ $A_0B_1B_2B_3B_4B_5$. Замкнемъ его прямою B_5A_0 и проведемъ полярный радіусъ Oc параллельно прямой B_5A_0 . Тогда давленіе $(+R)$ балки на опору A_0 будетъ равно ac , давленіе $(+R)$ балки на опору A_1 будетъ равно cb , потому что балка находится въ равновѣсіи подѣ дѣйствіемъ силъ $(-R)$ $W_1, W_2, W_3, W_4, (-R_1)$, для которыхъ $A_0B_1B_2B_3B_4B_5A_0$ есть замкнутый веревочный многоугольникъ, а (фиг. 156) диаграмма силъ изъ конхъ 1, 2, 3, 4 положительны, тогда какъ



Черт. 155.



Черт. 156.

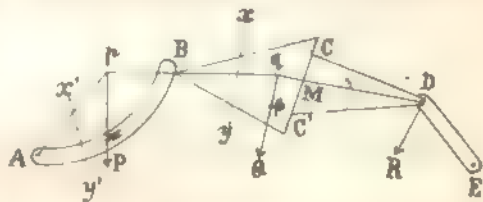
bc и ca отрицательны, такъ что многоугольникъ силъ слившійся въ одну прямую aba тоже замкнутый. Но въ многоугольникѣ силъ

$$ac + cb = ab = 1 + 2 + 3 + 4$$

согласно тому, что

$$R + R_1 = W_1 + W_2 + W_3 + W_4.$$

§ 374. Кривая давленій. Представимъ себѣ тѣла симметричныя относительно плоскости чертежа (фиг. 157) и расположенныя слѣдующимъ образомъ. Тѣло AB можетъ вращаться около неподвижной оси A ; клинъ BC упирается однимъ ребромъ въ тѣло AB ; тѣло CD опирается совершенно гладкою плоскостью (безъ тренія въ плоскость CC') въ грань клина; тѣло DE можетъ вращаться около неподвижной оси E и скрѣплено шарниромъ D съ тѣломъ CD . Найти графическое условіе равновѣсія системы этихъ тѣлъ, подѣ дѣйствіемъ силъ P, Q, R , приложенныхъ въ a, β и D .



Черт. 157

Давленіе въ A дѣйствуетъ по нѣкоторой прямой Ap и пересѣкаетъ силу P въ какой-нибудь точкѣ p . Разнодѣйствующая этого давленія и силы P должна быть уравновѣшена давленіемъ въ B и потому должна проходить чрезъ B . Эта сила, дѣйствующая въ B пересѣкаетъ силу Q

въ какой-нибудь точкѣ q . Равнодѣйствующая силы, дѣйствующей въ B и силы Q должна быть уравновѣшена давлениемъ плоскостей клина и тѣла CD ; поэтому она должна быть направлена по перпендикуляру M къ плоскости CC' . Основание M этого перпендикуляра должно, следовательно, лежать внутри площади по которой соприкасается клинъ BC' съ тѣломъ CD . Это давление должно проходить чрезъ D и равнодѣйствующая этого давления и силы R должна быть направлена по DE .

Не трудно видѣть, что линия $ApgDE$ есть веревочный многоугольникъ силъ P, Q, R . Изъ разсмотрѣнія этого частнаго случая вытекаетъ общее заключеніе: система тѣлъ присоединенныхъ другъ къ другу, изъ коихъ нѣкоторыя могутъ быть соединены шарнирами, находится въ равновѣсіи, если можно провести веревочный многоугольникъ заданныхъ силъ такъ, чтобы онъ проходилъ чрезъ все шарниры и пересталъ нормально все плоскости соприкосновения въ предѣлахъ площадей соприкосновения.

Такой веревочный многоугольникъ (въ нашемъ примѣрѣ $ApgDE$) называется кривою давленій. Кривая давленій играетъ важную роль въ теоріи сводовъ.

ОТЦѢЛЪ X.

Теорія удара и другихъ мгновенныхъ силъ.

ГЛАВА I.

Ударъ въ плоскомъ движеніи.

§ 375. **Общій видъ уравненій, опредѣляющихъ дѣйствіе удара.** Ударъ, направленный въ твердое тѣло, можетъ измѣнить его поступательныя скорости и его вращательныя скорости. Мы начнемъ изслѣдованіе съ такихъ движеній, въ которыхъ траекторіи всѣхъ точекъ до и послѣ удара находятся въ плоскостяхъ взаимно параллельныхъ; такое движеніе называется *плоскимъ*. Въ такого рода движеніяхъ вращенія происходятъ около осей перпендикулярныхъ къ плоскостямъ траекторій.

Примемъ за плоскость (x, y) плоскость параллельную плоскостямъ всѣхъ траекторій. Всякія вращательныя движенія, производимыя ударомъ, должны, согласно съ § 146, подчиняться уравненію:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma \left[y \int X dt - x \int Y dt \right].$$

Правая часть этого уравненія есть моментъ I мгновенной пары удара. Такъ что:

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = I \dots \dots \dots (1019)$$

Но согласно съ (136):

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \frac{d\theta}{dt} r^2 \dots \dots \dots (1020)$$

Если разсматриваемъ дѣйствіе удара на твердое тѣло, то:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \dots \dots \dots (1021)$$

при чем ω есть угловая скорость около оси пары L , одинаковая для всего тѣла. Поэтому

$$\Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \Sigma m \omega r^2 = \omega \Sigma m r^2 = \omega J, \quad . . (1022)$$

гдѣ J есть моментъ инерціи относительно оси вращенія ω .

Изъ (1019) и (1022) имѣемъ:

моментъ количества движенія вносимый ударомъ въ неподвижное тѣло равенъ

$$\omega J = L, \quad (1023)$$

гдѣ ω внесенная ударомъ вращательная скорость.

Если же тѣло имѣло до удара вращательную скорость ω , а послѣ удара его вращательная скорость сдѣлалась равною ω' , такъ что внесенная ударомъ вращательная скорость равна $\omega' - \omega$, то, вмѣсто (1023), получимъ:

$$J (\omega' - \omega) = L \quad (1024)$$

Если масса тѣла M , а его радиусъ инерціи относительно оси вращенія k , то $J = Mk^2$ и (1024) принимаетъ видъ:

$$Mk^2 (\omega' - \omega) = L \quad (1025)$$

Пусть:

(u, v) — проложенія скорости центра тяжести удараемаго тѣла *до удара*.

(u', v') — „ „ „ „ „ „ „ *послѣ удара*,

ω — угловая скорость вращенія около мгновенной оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, *до удара*,

ω' — угловая скорость вращенія около мгновенной оси, проходящей чрезъ центръ тяжести, *послѣ удара*,

M — масса удараемаго тѣла,

Mk^2 — моментъ инерціи удараемаго тѣла,

X, Y — проложенія удара,

L — мгновенная пара удара.

Тогда, согласно съ § 146 и (1025), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} M(u' - u) &= X \\ M(v' - v) &= Y \\ Mk^2(\omega' - \omega) &= L \end{aligned} \right\} \quad (1026)$$

Вообще уравненія § 146 могутъ быть выражены такъ:

$$\begin{aligned} (\text{пролож. колич. движ. послѣ удара}) - (\text{пролож. колич. движ. до удара}) &= \\ &= (\text{пролож. удара}) \quad (1027) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{момент. колич. движ. послѣ удара}) - (\text{момент. колич. движ. до удара}) &= \\ &= (\text{момент. пары удара}) \quad (1028) \end{aligned}$$

Уравнения (1026) суть частные случаи этихъ уравнений, именно въ примѣненіи ихъ къ одиночному удару производимому въ твердое тѣло.

§ 376. Ударъ гладкихъ шаровъ. Положимъ, что два шара, имѣющие массы m и m' движутся на встрѣчу другъ къ другу, по прямой соединяющей ихъ центры, со скоростями u и v , и, ударившись одинъ о другой, расходятся со скоростями u' и v' . Согласно съ (1026), имѣемъ:

$$\begin{aligned} u' - u &= - \frac{R}{m} \\ v' - v &= \frac{R}{m'} \end{aligned}$$

гдѣ R есть сила происшедшаго удара. Само собою разумѣется, что такой ударъ не вноситъ никакой мгновенной пары L .

Этихъ двухъ уравненій недостаточно для опредѣленія трехъ величинъ u' , v' и R по заданнымъ u и v . Для получения третьяго уравненія рассмотримъ подробнѣе, что происходитъ съ шарами въ теченіи удара, какъ бы ни былъ коротокъ промежутокъ времени его дѣйствія.

Процессъ удара раздѣляется на два періода: 1) *періодъ сжатія*, въ теченіи котораго шары сжимаются, причемъ разстояніе между ихъ центрами уменьшается; этотъ періодъ начинается соприкосновеніемъ шаровъ; 2) *періодъ возстановленія формы*, въ теченіи котораго шары опять приобретаютъ свой первоначальный видъ; этотъ періодъ кончается тѣмъ, что шары разстаются.

Отношеніе взаимодѣйствія въ теченіи 2-го періода къ взаимодѣйствію въ теченіи 1-го періода для различныхъ тѣлъ различно. Оно зависитъ отъ того, насколько скоро тѣло способно приобретать, послѣ небольшой деформаціи, свою первоначальную форму. Если это происходитъ сравнительно медленно, то шары успѣютъ уже разстаться, не успѣвъ принять первоначальный видъ: тогда взаимодѣйствіе во 2-мъ періодѣ меньше чѣмъ въ 1-мъ. Если же форма возстановляется еще ранѣе, чѣмъ шары разстаются, то взаимодѣйствіе въ обоихъ періодахъ одинаково.

Если взаимодѣйствія въ второмъ періодѣ столь мало, что имъ можно пренебречь, то тѣла называются *неупругими*. Въ этомъ случаѣ $u = v'$ и (1028) даютъ:

$$R = \frac{mv}{m + m'} (u - v) \dots \dots \dots (1029)$$

$$u' = v' = \frac{mu + m'v}{m + m'} \dots \dots \dots (1030)$$

Если нельзя пренебречь взаимодѣйствіемъ во второмъ періодѣ, то поступимъ такъ. Обозначимъ чрезъ R_0 дѣйствіе удара въ теченіи 1-го періода, продолжая обозначать чрезъ R полное дѣйствіе удара. Производя опыты съ шарами, приготовленными изъ различныхъ матеріаловъ и наблюдая

скорости u' и v послѣ удара, опредѣляемъ по формуламъ (102б) величину R , полагаямъ:

$$\frac{R}{R_0} = (1 + e), \quad (1031)$$

гдѣ e никогда не болѣе единицы и разсуждаемъ такъ R , можно вычислить по (1029), принимая шары за неупругие (обращая вниманіе только на 1-й періодъ), а затѣмъ, согласно (1031), R найдется помножая R_0 на $(1 + e)$, то есть по формулѣ:

$$R = \frac{mm'}{m + m'} (u - v) (1 + e) (1032)$$

Эта формула при такихъ опытахъ служить для опредѣленія e для разныхъ материаловъ. Когда e найдены и для нихъ составлены таблицы, то (1032) можетъ служить для рѣшенія задачъ объ ударѣ шаровъ, обладающихъ упругостью. Шары, для которыхъ $e = 1$, называются совершенно упругими. Но такихъ не существуетъ. Наибольшее e , близкое къ 1, свойственно стеклу и слоновой кости. Наименьшее e , близкое къ 0, свойственно свинцу.

§ 377. Балка, подвѣшенная на оси проходящей чрезъ ея центръ тяжести, ударяется абсолютно упругимъ шаромъ. Однородная балка надѣтая на поперечную ось, проходящую чрезъ ея центръ тяжести, выводится изъ состояніи покоя ударомъ, направленнымъ въ одинъ изъ ея концовъ перпендикулярно ея длинѣ, произведеннымъ абсолютно упругимъ шаромъ, движущимся перпендикулярно къ балкѣ со скоростью v .

Пусть:

M — масса балки,

J — ея моментъ инерціи,

m — масса шара,

v' — скорость шара послѣ удара,

ω' — вращательная скорость балки послѣ удара,

$2a$ — длина балки.

Въ этой задачѣ мы не можемъ пользоваться непосредственно формулою (1032) удара упругихъ шаровъ, потому что здѣсь сила удара R можетъ быть зависить отъ того, въ какую точку балки попадаетъ шаръ. Воспользуемся сначала формулами (102б).

Ударъ R происходитъ въ конецъ балки, находящійся на разстояніи a отъ ея центра тяжести. Слѣдовательно моментъ L вносимой ударомъ пары равенъ:

$$L = Ra (1033)$$

Вставляя эту величину въ послѣднее изъ уравненій (102б), получимъ:

$$Mk^2\omega' = Ra (1034)$$

такъ какъ угловая скорость ω балки до удара равна нулю по условию задачи. Изъ (1034), имѣемъ:

$$\frac{Mk^2}{a} \omega' = R \dots \dots \dots (1035)$$

Называя чрезъ u линейную скорость послѣ удара конца балки, имѣемъ.

$$u' = \omega' a \dots \dots \dots (1036)$$

Исключая ω' изъ (1035) и (1036), получимъ:

$$\frac{Mk^2}{a^2} u' = R \dots \dots \dots (1037)$$

Сравнивая эту формулу съ первою изъ (1026) и замѣтивъ, что начальная скорость u конца балки равна нулю, видимъ, что формула (1037) показываетъ, что балка ударяется въ конецъ съ такою силою, съ какою ударяется свободная сфера, имѣющая массу $\frac{Mk^2}{a^2}$. Ударъ балки шаромъ приведенъ теперь къ удару даннаго шара массы m обладающаго скоростью v о шаръ обладающій массою $\frac{Mk^2}{a^2}$. Вставивъ эту массу, вмѣсто m' въ формулу (1032) и полагая въ ней $e = 1$, $u = 0$, получимъ:

$$\frac{2 Mk^2 \cdot m \cdot v}{a \cdot \left(m + \frac{Mk^2}{a^2} \right)} = R.$$

Для удара шара объ тѣло получимъ ту же величину съ знакомъ $+$. Зная, что $Mk^2 = J$, получимъ:

$$\frac{2 Jmv}{(a \cdot m + J)} = + R \dots \dots \dots (1038)$$

Сравнивая (1038) съ (1034), имѣемъ:

$$+ J\omega' = \frac{2 Jmva}{(a^2 m + J)}$$

или

$$+ \omega' = \frac{2 mva}{(a^2 m + J)} \dots \dots \dots (1039)$$

Но (1028) даетъ:

$$v' - v = \frac{R}{m} \dots \dots \dots (1040)$$

Сравнивая (1039) съ (1040), получимъ:

$$v' - v = \frac{2 Jmv}{(a^2 m + J) m} = \frac{(a^2 m + J - 2J)}{a^2 m + J} v,$$

или

$$v' = \frac{(a^2 m - J)}{(a^2 m + J)} v \dots \dots \dots (1041)$$

Если, напротивъ, балка очень тонка въ вертикальномъ направленіи, то ея моментъ инерціи, согласно съ § 181-мъ, равенъ:

$$J = \frac{Ma^2}{3}.$$

Тогда (1038), (1039) и (1041) даютъ:

$$R = \frac{2mvM}{3m + M},$$

$$\omega' = \frac{6mv}{(3m + M)a},$$

$$v' = v \cdot \frac{3m - M}{3m + M}.$$

Если же балка представляетъ собою параллелепипедъ съ ребрами $2a$, $2b$, $2c$, то, согласно съ § 181:

$$J = M \frac{a^2 + c^2}{2}.$$

Тогда (1038), (1039) и (1041) даютъ:

$$R = \frac{2mv + (a^2 + c^2)M}{3a^2m(a^2 + c^2)M},$$

$$\omega' = \frac{6mva}{3a^2m + (a^2 + c^2)M},$$

$$v' = v \cdot \frac{3a^2m - (a^2 + c^2)M}{3a^2m + (a^2 + c^2)M}.$$

§ 378. Законы тренія во время удара одинаковы съ законами тренія скольженія. Опытъ Морена. Во время удара тѣла соприкасаются между собою, и если ударъ направленъ не по общей нормали къ соприкасающимся поверхностямъ, то должно явиться треніе. Спрашивается, будетъ ли ударное треніе имѣть то же отношеніе къ нормальному удару какъ треніе скольженія къ давленію, то есть одинаковъ ли коэффициентъ ударнаго и обыкновеннаго тренія.

Моренъ произвелъ нѣсколько опытовъ, которые показали, что коэффициентъ ударнаго тренія равенъ обыкновенному коэффициенту тренія. Эти опыты производились слѣдующимъ способомъ.

Къ ящику AB было придѣлано два столбика съ перекладиною, на которой помощью нитки подвѣшивался грузъ mg . Ящикъ наполнялся дробью до желаемого вѣса Mg . Ящикъ ставился своимъ плоскимъ дномъ на горизонтальную плоскость и опредѣлялся предварительными опытами коэффициентъ μ тренія ящика о плоскость. Отъ ящика шелъ горизонтально шнуръ перекинутый чрезъ блокъ, и на свободный конецъ этого шнура подвѣшивался грузъ:

$$(M + m)g \dots \dots \dots (1042)$$

При дѣйствіи такого груза ящикъ, немного подтолкнутый, двигался горизонтально и равномерно со скоростью v . Во время этого движенія перерѣзывали нитку, вслѣдствіе чего грузъ mg падаетъ въ ящикъ и ударившись о дробь оставался неподвижнымъ относительно ящика. Этимъ ударомъ груза mg объ ящикъ вызывалось ударное треніе между ящикомъ и горизонтальною плоскостію, по которой онъ двигался. Оказалось, что скорость ящика V до удара о ящикъ груза mg оставалась такою же и послѣ этого удара. Покажемъ, что этимъ доказывалось равенство коэффиціентовъ тренія обыкновеннаго и ударнаго.

Ударъ груза о ящикъ передается, и происходитъ ударъ ящика о плоскость по которой онъ скользитъ. Пусть:

F — горизонтальная слагающая удара ящика о плоскость,

R — вертикальная слагающая удара ящика о плоскость.

v' — скорость ящика послѣ удара,

t — время, въ теченіи котораго падаетъ грузъ mg .

По законамъ паденія грузъ mg ударяется о ящикъ со скоростью gt .

Поэтому вертикальная слагающая R удара опредѣляется, согласно (1026), уравненіемъ

$$mgt = R$$

Отдѣлившись отъ перекладины, грузъ mg уже не принадлежитъ къ системѣ ящика вплоть до конца своего паденія. Поэтому масса системы двигаемой грузомъ $(M + m)$ μ уменьшается, и, вслѣдствіе этого скорость v системы увеличивается на величину пропорциональную t именно на ft гдѣ

$$f = \frac{\mu mg}{M + (M + m) \mu}$$

Такимъ образомъ въ моментъ начала удара ящикъ обладаетъ горизонтальною скоростью

$$v + ft$$

До удара (но послѣ перерѣза нити) масса движимая грузомъ $(M + m)$ μ состояла изъ массы M ящика и массы $(M + m)$ μ самого движущаго груза. Вся эта масса

$$M + (M + m) \mu$$

двигалась со скоростью $v + ft$.

Послѣ удара грузъ mg опять сдѣлался частью системы; масса ея сдѣлалась, слѣдовательно равною

$$M + m + (M + m) \mu$$

и скорость сдѣлалась равною v' . Поэтому количество движенія въ горизонтальномъ направленіи всей системы вѣстѣ съ грузомъ mg до удара равно

$$[M + (M + m) \mu] (v + ft) + mv.$$

Количество движения въ горизонтальномъ направленіи всей системы вмѣстѣ съ грузомъ послѣ удара равно:

$$[M + m + (M + m) \mu] v'.$$

Слѣдовательно, согласно съ (1027):

$$[M + m + (M + m) \mu] v' - [M + (M + m) \mu] (v + ft) = mv = F'.$$

Если согласно результату опытовъ Морена сдѣлать здѣсь $v' = v$ и вставить вмѣсто f его величину получимъ:

$$F = \mu R$$

которое и показываетъ, что отношеніе $\frac{F}{R}$ ударнаго тренія къ нормальному удару равно тому же μ , которому равно отношеніе обыкновеннаго тренія скольженія къ давленію.

§ 379. Уравненія удара совершенно неупругихъ и шероховатыхъ тѣлъ. Пусть (фиг. 158)

G и G' — центры тяжести ударающихся тѣлъ,

A — точка соприкосновенія ихъ поверхностей,

U — проложеніе скорости точки G на касательную, до удара,

V — проложеніе скорости точки G на нормаль до удара,

u и v — проложенія этихъ скоростей тотчасъ послѣ начала удара,

t — весьма малое время, протекшее отъ начала удара до измѣненія скоростей U, V въ u, v ,

Ω — угловая скорость тѣла G до удара,

ω — угловая скорость тѣла G въ моментъ t ,

M — масса тѣла G ,

k — радиусъ инерціи относительно оси вращенія проходящей чрезъ G

GN — перпендикуляръ на касательную.

$$AN = x, \quad NG = y.$$

Тѣми же буквами, но со значками «примъ» обозначаемъ соотвѣтственныя величины и точки второго тѣла.

Въ случаѣ абсолютно неупругихъ тѣлъ относительная скорость скольженія и относительная скорость сжатія дѣлаются равными нулю въ концѣ удара. Если положить t равнымъ продолжительности всего удара, то величины $u, v, \omega, u', v', \omega'$ относятся къ концу удара.

Найдемъ проложеніе скорости точки A на касательную, по окончаніи удара, разсматривая A какъ точку тѣла G .

Вслѣдствіе поступательнаго движенія тѣла G точка A обладаетъ по касательной въ концѣ удара скоростью u . Вслѣдствіе вращательнаго движенія точка A обладаетъ скоростью $+ \omega \cdot GA$, проложеніе которой на касательную равно $(-y\omega)$. Поэтому полное проложеніе на касательную

скорости точки A въ концѣ удара равно $u - u\omega$. Точно такъ же полное проложеніе скорости точки A тѣла G на касательную въ концѣ удара равно $u + u'\omega'$. Но относительная скорость по касательной (скольженіе) благодаря шероховатости тѣлъ равна нулю.

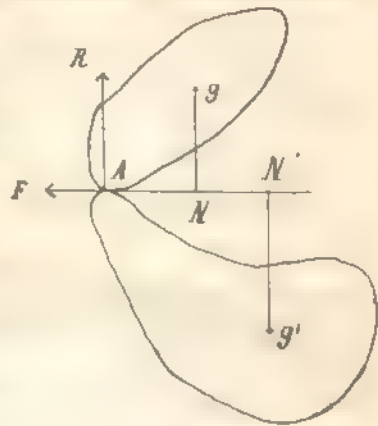
Слѣдовательно:

$$u - u\omega - u' - u'\omega' = 0 \quad (1043)$$

Вслѣдствие абсолютной неупругости тѣлъ относительная скорость по нормали въ концѣ удара равна нулю; это можетъ быть, помощью такихъ же разсужденій, выражено такъ:

$$v + x\omega - v' - x'\omega' = 0 \quad (1044)$$

Ударъ 1-го тѣла о второе равенъ удару 2-го тѣла о первое, и потому, согласно съ (1027), имѣемъ для проложенія ударовъ на касательную:



Черт. 158.

$$M(u - U) + M'(u' - U') = 0 \quad (1045)$$

и для проложеній ударовъ на нормаль:

$$M(v - V) + M'(v' - V') = 0 \quad (1046)$$

Наконецъ (1028) дасть:

$$Mk^2(\omega - \Omega) + M(u - U)y - M(v - V)x = 0 \quad (1047)$$

$$M'k'^2(\omega' - \Omega') + M'(u' - U')y' - M'(v' - V')x' = 0 \quad (1048)$$

Этихъ 6-ти уравненій (1043), (1044), (1045), (1046), (1047) и (1048) достаточно для опредѣленія движенія послѣ удара по заданному движенію до удара.

§ 380 Уравненія удара совершенно неупругихъ и абсолютно гладкихъ тѣлъ. Если тѣла совершенно не упруги и абсолютно гладки, то уравненіе (1043) теряетъ смыслъ, а вмѣсто уравненія (1045) имѣемъ:

$$u - U = 0 \quad (1049)$$

$$u' - U' = 0 \quad (1050)$$

§ 381. Уравненія удара совершенно гладкихъ упругихъ тѣлъ. Если тѣла упруги, то надо ввести еще реакцію восстановленія формы; если при этомъ между тѣлами нѣтъ тренія (или мы ямъ пренебрегаемъ), то проложеніе удара на касательную равно нулю для *каждаго* тѣла. Поэтому, въ этомъ случаѣ, получимъ:

$$M(u - U) = 0 \quad (1051)$$

$$M(v - V) = R \quad (1052)$$

$$Mk^2(\omega - \Omega) = Rx \dots\dots\dots (1053)$$

$$M'(u' - U') = 0 \dots\dots\dots (1054)$$

$$M'(v' - V') = -R \dots\dots\dots (1055)$$

$$M'k_1'^2(\omega' - \Omega') = -Rx' \dots\dots\dots (1056)$$

Кроме того скорость C сжатия получится из уравнения:

$$C = v + x\omega' - v' - x'\omega \dots\dots\dots (1057)$$

Подставляя сюда величины, определяемые из (1051) ... (1056) получим:

$$C = C_0 - a'R \dots\dots\dots (1058)$$

где C_0 и a' постоянныя.

Полагая здѣсь $C = 0$, получимъ величину $R = \frac{C_0}{a'}$ удара, дѣйствующаго въ періодъ сжатія; помножая его на $(1 + e)$ получимъ полную величину R удара; подставляя это R въ (1051) ... (1056), получимъ u, u', ω, ω' по заданнымъ $U, V, \Omega, U', V', \Omega'$.

§ 382. Уравненія удара тѣлъ упругихъ и несовершенно шероховатыхъ. Изслѣдуемъ наконецъ ударъ несовершенно упругимъ тѣлъ, принимая во вниманіе и ударное треніе F' . Принимая моментъ начало удара за начало времени.

Пусть:

R — количество движенія, сообщаемое тѣлу M по нормали въ теченіи малого времени t ,

F' — количество движенія, сообщаемое тѣлу M по касательной NA въ теченіи t .

Уравненія удара будутъ:

$$M(u - U) = -F \dots\dots\dots (1059)$$

$$M(v - V) = R \dots\dots\dots (1060)$$

$$Mk^2(\omega - \Omega) = Fy + Rx \dots\dots\dots (1061)$$

$$M'(u' - U') = F' \dots\dots\dots (1062)$$

$$M'(v' - V') = -R \dots\dots\dots (1063)$$

$$M'k_1'^2(\omega' - \Omega') = F'y' - Rx' \dots\dots\dots (1064)$$

Относительная скорость скольженія S опредѣлится уравненіемъ.

$$S = u - v\omega - u' - v'\omega' \dots\dots\dots (1065)$$

составленнымъ помощью разсужденій, примѣненныхъ къ составленію уравненія (1043).

Относительная скорость сжатія C опредѣлится уравненіемъ:

$$C = v + x'\omega' - v' - x\omega \dots\dots\dots (1066)$$

Если подставимъ въ (1065) и (1066) величины, опредѣляемыя изъ уравненій (1059) . . . (1064), то получимъ:

$$S = S_0 - aF - bR \dots \dots \dots (1067)$$

$$C = C_0 - b'F - a'R \dots \dots \dots (1068)$$

гдѣ:

$$S_0 = U - y\Omega = U' - y'\Omega \dots \dots \dots (1069)$$

$$C_0 = U + x\Omega = U' + x'\Omega \dots \dots \dots (1070)$$

$$a = \frac{1}{M} + \frac{1}{M_1} + \frac{y^2}{Mk^2} + \frac{y_1^2}{M_1k_1^2} \dots \dots \dots (1071)$$

$$a' = \frac{1}{M} + \frac{1}{M_1} + \frac{x^2}{Mk^2} + \frac{x_1^2}{M_1k_1^2} \dots \dots \dots (1072)$$

$$b = \frac{xy}{Mk^2} - \frac{x'y'}{M_1k_1^2} \dots \dots \dots (1073)$$

x, y, x', y' имѣютъ тѣ же значенія (фиг. 157) какъ и въ § 379-омъ.

Величины S_0, C_0, a, a', b называются *постоянными отнош. удара*, причемъ:

S_0 — начальная скорость скольженія,

C_0 — начальная скорость сжатія,

a, a', b — не зависятъ отъ скоростей.

a и a' существенно положительны, b можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ. Замѣтимъ, что изъ (1071), (1072) и (1073) слѣдуетъ:

$$aa' > b^2 \dots \dots \dots (1074)$$

§ 383 Изображающая точка Пользованіе уравненіями предыдущаго параграфа значительнѣе облегчается примѣненіемъ особаго графическаго метода, основаннаго на правилѣ обр. *изображающей точки*. Къ изложенью этого метода мы и приступимъ. Примемъ, что чрезъ R мы обозначили въ предыдущемъ параграфѣ количество движенія, сообщаемое тѣлу M по нормали въ теченіи весьма малаго времени t , считаемаго отъ начала удара.

Это R равно нулю въ началѣ удара; затѣмъ оно возрастаетъ и достигаетъ максимальной величины въ концѣ удара. Въ теченіи времени dt это R возрастаетъ на dR . Удобнѣе, для изслѣдованія процесса, происходящаго въ теченіи удара, принять не t , а R за независимое переменное и разсматривать послѣдовательныя dR равными между собою.

Съ возрастаніемъ R измѣняется и F , но dF могутъ быть и положительными, можетъ случиться, что какое-нибудь dF достаточно для уничтоженія скольженія. Согласно опытамъ Морена (§ 378)

$$dF = \mu dR \dots \dots \dots (1075)$$

гдѣ μ коэффициентъ тренія.

Примем касательную и нормаль за оси координат AF и AR (фиг. 159) съ началомъ въ A . На AR будемъ откладывать абсциссы R на AF будемъ откладывать ординаты F . Точка P определяемая абсциссою R и ординатою F , называется изображающею точкою.

Изслѣдование процесса, происходящаго во время удара, сводится къ изслѣдованію движенія изображающей точки P .

Въ началѣ удара $R=0$ и $F=0$, потому P находится въ началѣ координатъ.

Ординату F откладываемъ положительную въ сторону противоположную той, въ которую трение дѣствуетъ на тѣло M , такъ что продолженіе скорости точки P на ось AF направлено въ ту сторону, въ которую скользитъ тѣло M . Въ теченіи удара это положеніе можетъ быть и положительнымъ и отрицательнымъ.

Изъ уравненій (1067) слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто, выражаемое въ перемѣнныхъ F и R уравненіемъ

$$S = 0 \dots (1076)$$

есть прямая. Назовемъ эту прямую SS' (фиг. 159) *прямую нулевого скольженія*.

Изъ уравненія (1068) слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто, выражаемое въ перемѣнныхъ F и R уравненіемъ.

$$C = 0 \dots (1077)$$

есть прямая. Назовемъ ее *прямую наибольшаго сжатія*, потому что скорость C относительнаго сжатія дѣлается равною нулю въ моментъ наибольшаго сжатія.

Для того, чтобы можно было изобразить эти двѣ прямыя на чертежѣ (фиг. 159), нужно найти координаты ихъ точекъ пересѣченія съ осями координатъ. Уравненія ихъ, написанныя вполнѣ, таковы:

$$S_0 - aF' - bR = 0 \text{ прямая нулевого скольженія } S = 0. (1078)$$

$$C_0 - bF' - aR = 0 \text{ прямая наибольшаго сжатія } C = 0. (1079)$$

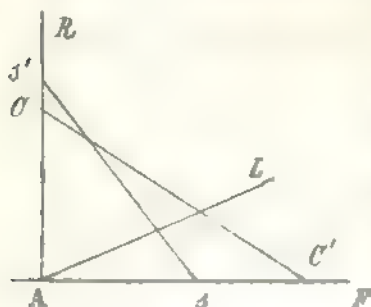
Изъ этихъ уравненій имѣемъ (фиг. 159):

$$AC = \frac{C_0}{a}; \quad AS = \frac{S_0}{a}$$

$$AC' = \frac{C_0}{b}; \quad AS' = \frac{S_0}{b}$$

По этимъ даннымъ и чертимъ прямыя CC' и SS' (фиг. 159).

На основаніи неравенства (1074) заключаемъ, что прямая SS' составляетъ съ осью AF больший уголъ, чѣмъ прямая CC' . Это обстоя-



Фиг. 159

тельство и положительность постоянных a и α показывает, что прямые SS' и $C'C''$ не могут пересекаться в углу отрицательных F и R .

Прослѣдимъ теперь движение изображающей точки P .

При началѣ удара тѣла M и M' скользятъ одно по другому; при этомъ:

$$F = \mu R. \quad (1080)$$

и точка P движется по прямой AL (фиг. 159), определяемой уравнениемъ (1080) пока не достигнетъ пересѣченія AL съ SS' . Во все это время трѣніе достигало своей предѣльной величины (какъ при тѣлѣ, скользящемъ по наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ болѣе угла трѣнія). Абсцисса R_0 точки пересѣченія прямыхъ AL и SS' определяется изъ (1078) и (1080), формулою

$$R_0 = \frac{S_0}{a\mu + b}. \quad (1081)$$

при чемъ R_0 есть количество движенія по нормали, внесенное ударомъ за время отъ начала удара до того момента, когда скольженіе можетъ обратиться въ катаніе. После этого момента, въ который P достигаетъ прямой $S'S$, возбуждается только трѣніе достаточное для удержанія тѣла M и M' отъ скольженія (какъ при тѣлѣ, лежащемъ на наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ не болѣе угла трѣнія).

Случай 1-ый (фиг. 160).

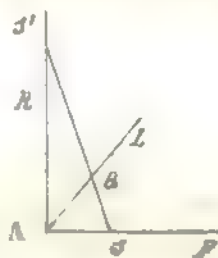
Если уголъ SSA менѣе чѣмъ $\arctg \mu$ *), то трѣніе dF не-обходимое для удержанія отъ скольженія, менѣе предѣльнаго трѣнія μdR . Трѣніе уже не достигаетъ въ теченіи остального процесса удара предѣльнаго значенія; скольженія уже не будетъ больше до конца удара. Поэтому P , дойдя по AL до прямой SS' , движется далѣе по этой прямой въ сторону возрастающихъ R . Итакъ получился путь $AQ'S'$ точки P .

Случай 2-ой (фиг. 161). Если же уголъ SSA болѣе чѣмъ $\arctg \mu$, то

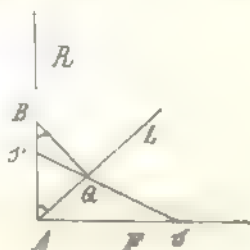
$$\frac{dF}{dR} > \mu$$

и требуется болѣе трѣнія, чѣмъ тѣла могутъ обнаружить, для удержанія ихъ отъ скольженія. Трѣніе удерживаетъ свою предѣльную величину и скольженіе возможно.

Когда P дойдетъ до прямой SS' , то не пойдетъ по SS' , потому что скольженіе существуетъ; но при переходѣ точки P по ту сторону прямой



Фиг. 160.

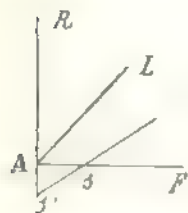


Фиг. 161.

*) Изъ (1080) видно, что $\arctg \mu = LAR$.

SS' скольжение мѣняетъ знакъ, вследствие чего и трѣніе мѣняетъ свой знакъ: dF станутъ отрицательными, но трѣніе удерживаетъ свою абсолютную величину. Слѣдовательно P пойдетъ по прямой QB , тоже составляющей острый уголъ $\arctg \mu$ съ осью AR , какъ и AL уже съ уменьшающимися ординатами F . Итакъ, получится путь AQB точки P .

Случай 3-й Прямые не пересекаются въ положительномъ углу. Точка P не встрѣчается съ прямою SS' и идетъ по AL . Трѣніе все время достигаетъ своей предѣльной величины. Получается путь AL точки P (фиг. 162).



Фиг. 162.

Когда P доходитъ до прямой CC' , то прекращается сжатіе тѣла и начинается періодъ возстановленія формы тѣла. Если R_1 есть абсцисса точки, въ которой P встрѣчаетъ прямую CC' , то абсцисса R_2 той точки, въ которую P приходитъ въ самомъ концѣ удара равна:

$$R_2 = R_1 (1 + e) \dots \dots (1082)$$

согласно съ (1031).

Исследование удара приводится къ слѣдующему

Точка P идетъ по прямой AL , составляющей съ осью AR уголъ равный, $\arctg \mu$, до тѣла поръ, пока встрѣтитъ прямую SS' . Дальше она идетъ или по SS' или по QB и именно по той изъ нихъ, которая составляетъ съ осью AR меньшій острый уголъ. При сѣзѣ QB составляетъ съ осью AR уголъ $\arctg \mu$. Точка P движется по этимъ прямымъ въ сторону возрастающихъ R . Полная сила R сѣза нормального удара получается по множенію на $(1 + e)$ абсциссы R_1 той точки, въ которой P встрѣчитъ прямую CC' . Ордината точки, имѣющей абсциссу $R_0 (1 + e)$ есть полная величина F касательнаго удара (удара трѣніемъ). Подставляя эти величины R и F въ уравненія (1059) . . . (1064), найдемъ движеніе тѣла (скорости) послѣ удара.

Остается разсмотрѣть нѣкоторыя особенные случаи. Можетъ случиться, что $S_0 = 0$, тогда (1078) принимаетъ видъ:

$$aF + bR = 0 \dots \dots (1083)$$

прямая SS' проходить чрезъ начало.

Если при этомъ острый уголъ составляемый прямою SS' съ осью AR менѣе чѣмъ $\arctg \mu$, то есть если

$$\frac{b}{a} < \mu$$

то P идетъ изъ начала A по AS въ сторону возрастающихъ R ; трѣніе все время менѣе предѣльнаго, скольженія нѣтъ.

Если, при $S_0 = 0$,

$$\frac{b}{a} > \mu$$

то P движется по AL составляющей съ осью AR уголъ $LAR = \arctg \mu$. Трение все время достигает предѣльной величины; все время происходит скольженіе.

§ 384. Ударъ шара объ стѣну. Шаръ движется, не вращаясь, по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью V и ударяется въ вертикальную стѣну, съ которою V составляетъ уголъ α , коэффициентъ тренія шара и стѣны равенъ μ . Опредѣлить движеніе шара послѣ удара о стѣну (фиг. 163).

Обозначая чрезъ r радіусъ шара, пользуясь формулами (1059) — (1066) и замѣчая, что трениемъ возбуждается вращеніе, получимъ:

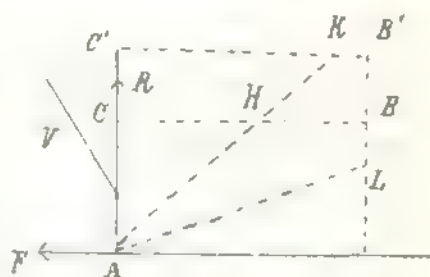
$$M(u - V \sin \alpha) = -F \quad (1084)$$

$$M(v + V \cos \alpha) = R \quad (1085)$$

$$Mk^2\omega = Fr \quad (1086)$$

$$S = u - r\omega \quad (1087)$$

$$C = -v \quad (1088)$$



Фиг. 163.

Исключая u , v , ω изъ этихъ пяти уравненій получимъ соответственныя уравненіямъ (1067) и (1068) уравненія:

$$S = V \sin \alpha - \frac{r^2 + k^2}{k^2} \cdot \frac{F}{M} \quad (1089)$$

$$C = V \cos \alpha - \frac{R}{M} \quad (1090)$$

Видимъ, что въ настоящемъ случаѣ:

$$S = V \sin \alpha; \quad C_0 = V \cos \alpha \quad (1091)$$

$$a = \frac{r^2 + k^2}{k^2 M} \quad (1092)$$

$$b = 0 \quad (1093)$$

$$a' = \frac{1}{M} \quad (1094)$$

Поэтому уравненіе (1078) принимаетъ видъ:

$$V \sin \alpha - \frac{r^2 + k^2}{k^2 M} \cdot F = 0 \quad \text{прямая нулевого скольженія } S = 0 \quad (1095)$$

Уравненіе (1079) принимаетъ видъ:

$$V \cos \alpha - \frac{1}{M} R = 0 \quad \text{прямая наибольшаго сжатія } C = 0 \quad (1096)$$

Видимъ, что прямая SS' нулевого сжатія представляется прямою, проведенною параллельно оси AR на разстояніи $\frac{k^2}{r^2 + k^2} MV \sin \alpha$.

Прямая (C'), определяемая уравнением (1096), представляется прямою, проведенною параллельно оси AT на расстоянии $MV \cos \alpha$ отъ нея (фиг. 163).

Пусть B есть точка пересѣченія этихъ прямыхъ. Не трудно найти.

$$\operatorname{tg} BAC = \frac{k^2}{r^2 + k^2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Но, согласно (403), для сферы $k = \frac{2}{7} r$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} BAC = \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha.$$

1) Шаръ совершенно неупругъ

Если $\mu > \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$, то прямая AL наклонная къ AR подъ угломъ $\arctg \mu$ пересѣкаетъ прямую SB нулевого скольженія въ точкѣ L прежде чѣмъ идущая по ней изображающая точка P встрѣтится съ прямою CB наибольшаго сжатія. Тогда P описываетъ путь ALB . Въ моментъ наибольшаго сжатія F и R суть координаты точки B и потому определяются изъ уравненій:

$$F = \frac{2}{7} MV \sin \alpha \dots \dots \dots (1097)$$

$$R = MV \cos \alpha \dots \dots \dots (1098)$$

Подставляя эти величины въ (1084), (1085), (1086), найдемъ скорости u , v , ω шара послѣ удара.

Если $\mu < \frac{2}{7} \operatorname{tg} \alpha$, то прямая $F = \mu R$ пересѣкаетъ прямую CB въ какой-нибудь точкѣ H прежде, чѣмъ она достигнетъ прямой SB ; трение не останавливаетъ скольженія. Въ моментъ наибольшаго сжатія F и R суть координаты точки H , и потому определяются уравненіями:

$$F = \mu MV \cos \alpha \dots \dots \dots (1099)$$

$$R = MV \cos \alpha \dots \dots \dots (1100)$$

Подставляя эти величины въ (1084), (1085), (1086), найдемъ скорости u , v , ω шара послѣ удара.

2) Шаръ обладает упругостью, характеризуемою постояннымъ e .
 P движется пока достигнетъ абсциссы

$$R = MV \cos \alpha (1 + e).$$

Если эта абсцисса равна AC'' (фиг. 163), то проводимъ CB' параллельно CB ; получаемъ

$$\operatorname{tg} B'AC = \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1 + e)}.$$

Если $\mu > \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1+e)}$, то P описываетъ путь ALB'

$$F = \frac{2}{7} MV \sin \alpha$$

$$R = MV \cos \alpha (1+e).$$

Если $\mu < \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1+e)}$, то,

$$F = \mu MV \cos \alpha \cdot (1+e)$$

$$R = MV \cdot \cos \alpha \cdot (1+e)$$

Если β есть уголъ, составляемый скоростью центра шара по окончаннн удара со стѣною, такъ что $\operatorname{tg} \beta = \frac{u}{v}$, то при $\mu > \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1+e)}$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1+e)}$$

при $\mu < \frac{2}{7} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{(1+e)}$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu(1+e)}{e}$$

Если тренія нѣтъ, такъ что $\mu = 0$ и если шаръ совершенно упругъ, такъ что $e = 1$, то

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

уголъ падения равенъ углу отраженія. Но это только при $e = 1$; $\mu = 0$

Этотъ способъ изслѣдованія можно распространить и на движеніе, въ которомъ траекторіи не параллельны одной плоскости. Но мы этого дѣлать не будемъ: желающіе познакомиться съ такимъ обобщеніемъ найдутъ его въ Динамикѣ Рунта: *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. Routh. 1890.* или въ нѣмецкомъ переводѣ: *Die Dynamik der Systeme Starrer Körper Routh. 1898* съ предисловіемъ K. Klein'a.

ГЛАВА II.

Общія теоремы о мгновенныхъ силахъ.

§ 385. Общее уравненіе возможныхъ перемѣщеній для мгновенныхъ силъ. Пусть:

x, y, z —координаты точки m системы,

X, Y, Z —проложенія дѣйствующихъ на точку m мгновенныхъ силъ,

u, v, w —проложенія скорости точки m до удара,

u', v', w' —проложенія скорости точки m послѣ удара.

Согласно съ началомъ возможныхъ перемѣщеній имѣемъ:

$$\sum m [(u'-u) \delta x + (v'-v) \delta y + (w'-w) \delta z] = \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z). \quad (1101)$$

гдѣ $\delta x, \delta y, \delta z$ суть возможные перемѣщенія, между которыми могутъ существовать соотношенія, обуславливаемыя связями.

§ 386. Теорема Карно. Примемъ сначала, что разсматриваемыя мгновенныя силы происходятъ только отъ взаимодействия составляющихъ систему тѣлъ (ударъ двухъ тѣлъ, внезапно устанавливающаяся связь двухъ точекъ нити и проч.). Въ этомъ случаѣ дѣйствія и противоѣдствія уравновѣшиваются, и сумма ихъ возможныхъ работъ равна нулю для всѣхъ перемѣщеній, не измѣняющихъ разстояній между взаимодействующими точками. Если ударявшіяся тѣла абсолютно неупруги то скорости непосредственно послѣ удара, удаляющія тѣла одно отъ другого, равны нулю. Примемъ, поэтому, за возможные перемѣщенія, перемѣщенія, происходящія въ теченіи безконечно-малаго времени dt слѣдующаго за ударомъ, такъ что:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= u' \delta t \\ \delta y &= v' \delta t \\ \delta z &= w' \delta t \end{aligned} \right\} (1102)$$

Благодаря равенству нулю суммы возможныхъ работъ мгновенныхъ силъ, то есть первой части уравненія (1101) и согласно съ (1102), уравненіе (1101) принимаетъ видъ:

$$\sum m [(u' - u) u + (v' - v) v + (w' - w) w] = 0 \quad . . . (1103)$$

или

$$\sum m (u^2 + v^2 + w^2) - \sum m (u u' + v v' + w w') \quad . . . (1104)$$

или

$$\begin{aligned} \sum m (u'^2 + v'^2 + w'^2) - \sum m (u^2 + v^2 + w^2) = \\ = \sum m [(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2] \quad . . . (1105) \end{aligned}$$

Это уравненіе выражаетъ собою теорему Карно.

Теорема Карно. При ударѣ абсолютно неупругихъ тѣлъ всегда теряется живая сила, и потерянная живая сила равна живой силѣ потерянныхъ скоростей. Подъ именемъ потерянныхъ скоростей здѣсь разумѣются $(u' - u)$, $(v' - v)$, $(w' - w)$.

§ 387. 2-я теорема Карно. Положимъ теперь, что мгновенныя силы производятся не ударомъ, а взрывомъ системы. Здѣсь взаимодействия уравновѣшиваются непосредственно передъ ударомъ. Поэтому здѣсь вмѣсто (1102) будутъ такіа соотношенія

$$\begin{aligned} \delta x &= u \delta t \\ \delta y &= v \delta t \\ \delta z &= w \delta t \end{aligned}$$

отнѣсаясь къ скоростямъ u, v, w до взрыва, а не къ скоростямъ u', v', w' послѣ удара. Поэтому (1101) приметъ видъ:

$$\sum m [(u' - u) u + (v' - v) v + (w' - w) w] = 0$$

или

$$\begin{aligned} \Sigma m (u'^2 + v'^2 + w'^2) - \Sigma m (u^2 + v^2 + w^2) = \\ = \Sigma m [(u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2] \quad . \quad . \quad (1106) \end{aligned}$$

Это уравненіе выражаетъ 2-ую теорему Карно.

2-ая теорема Карно. *При взрывѣ всегда приобретается живая сила, при чемъ приобретенная живая сила равна живой силѣ приобретенныхъ скоростей.*

§ 388. 3-я теорема Карно. Если ударъ происходитъ между совершенно упругими тѣлами, то весь процессъ удара раздѣляется на два періода. Въ первомъ періодѣ тѣла сжимаются какъ неупругія, и теряется живая сила по 1-й теоремѣ Карно. Во второмъ періодѣ происходитъ то же, что при взрывѣ, и приобретается живая сила по 2-й теоремѣ Карно равная той, которая была потеряна въ 1-мъ періодѣ. Въ результатѣ остается та же самая живая сила, которая была бы до удара. Отсюда:

3-я теорема Карно. *При ударѣ абсолютно упругихъ тѣлъ живая сила остается безъ измѣненія.*

ОТДѢЛЪ XI.

Общая теорія уравненій механики.

ГЛАВА I.

Уравненія Лагранжа во 2-ой формѣ.

Теперь мы приступимъ къ изученію общихъ свойствъ уравненій механики, то есть къ изученію предмета, составляющаго существеннѣйшую часть *аналитической механики*.

§ 389. Выраженія декартовыхъ координатъ чрезъ независимыя координаты. Если движущаяся система состоитъ изъ n точекъ, то положеніе каждой точки опредѣляется тремя декартовыми координатами (x, y, z). Для опредѣленія движенія такой системы потребуется слѣдовательно, кромѣ времени t , еще $3n$ декартовыхъ координатъ.

Если при этомъ движеніе точекъ системы стѣснено связями, то всегда можно примѣнить къ дѣлу такія *независимыя* между собою координаты $q_1, q_2, q_3, \dots, q_k$, которыхъ было бы меньше чѣмъ $3n$, и чрезъ которыя можетъ быть выражена каждая изъ декартовыхъ координатъ, такъ что уравненіе связей тождественно удовлетворяются при подстановкѣ въ нихъ независимыхъ координатъ вмѣсто декартовыхъ. Напримѣръ: если система состоитъ изъ одной точки, привужденной двигаться по сферѣ

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (1107)$$

то положеніе точки можетъ быть вполне опредѣлено двумя только независимыми координатами, именно широтою q_1 и долготою q_2 , при чемъ декартовы координаты выражаются чрезъ широту и долготу такъ:

$$x = r \cdot \cos q_1 \cdot \cos q_2,$$

$$y = r \cdot \cos q_1 \cdot \sin q_2,$$

$$z = r \cdot \sin q_1.$$

Вставляя вмѣсто x, y, z эти изъ выраженія чрезъ q_1 и q_2 въ уравненіе связи [сферы (1107)], получимъ тождество.

Итак, декартовы координаты выражаются чрез независимыя такими k формулами

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y_1 &= f_2(q_1, q_2, \dots) \\ z_1 &= f_3(q_1, q_2, \dots) \\ x_2 &= f_4(q_1, q_2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1108)$$

помощью которых уравнения связей тождественно удовлетворяются. Число k независимых координат меньше числа $3n$ декартовых, и если бы можно было установить дифференциальныя уравнения движения для независимых координат, то затѣмъ можно было бы изслѣдовать движение, уже не заботясь о связяхъ. Такая общія уравнения движения въ независимыхъ координатахъ и были, какъ мы это увидимъ въ § 392, установлены Лагранжемъ. Число k независимыхъ координатъ q_1, q_2, \dots называется степенью свободы системы.

§ 390. Выражение живой силы въ независимыхъ координатахъ. Обозначимъ первыя производныя отъ координатъ по времени значками вверху, такъ что

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1'; \quad \frac{dy_1}{dt} = y_1' \dots \quad \frac{dq_1}{dt} = q_1', \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2' \dots$$

Тогда выражение живой силы T въ декартовыхъ координатахъ даетъ

$$2T = \sum m (x'^2 + y'^2 + z'^2) \dots \dots \dots (1109)$$

Для общности предположимъ, что нѣкоторыя связи измѣняютъ свой видъ или положеніе съ теченіемъ времени (зависятъ отъ времени). Тогда въ первыя части уравненій (1108) войдетъ также и время, и въ нихъ получимъ:

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial x_1}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} q_2' + \dots \\ y_1' &= \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial y_1}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_1}{\partial q_2} q_2' + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1110)$$

Подставивъ эти выраженія въ (1109) и опредѣливъ изъ (1108) вошедшія въ (1110) величины $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial q}, \dots$ чрезъ q_1, q_2, \dots найдемъ

$$2T = A_{11}q_1'^2 + 2A_{12}q_1'q_2' + \dots + B_1q_1' + B_2q_2' + \dots + C \dots (1111)$$

гдѣ коэффициенты $A_{11}, A_{12}, B_1, B_2, C$ суть функции переменныхъ t, q_1, q_2, \dots

Чрезвычайно важно замѣтить, что въ правой части уравненія (1111) не будетъ членовъ 1-го порядка и нулевого порядка относительно q_1', q_2', q_2', \dots если не будетъ въ правыхъ частяхъ уравненій (1110) первыхъ

членовъ; а эти члены $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$... равны нулю въ томъ случаѣ, когда уравненія связей не заключаютъ явно времени. Итакъ, если связи не зависятъ отъ времени, то живая сила выражается такою функциею отъ $q_1, q_2 \dots q_k, q_1', q_2' \dots q_k'$, въ которой перемѣнные $q_1, q_2, q_3' \dots q_k'$, входятъ только или квадратами или попарными произведеніями.

Другими словами: если связи не зависятъ отъ времени, то живая сила выражается *однородною* функциею *второго* порядка относительно перемѣнныхъ $q_1', q_2', q_3' \dots$, представляющихъ собою первую производныя по времени отъ независимыхъ координатъ.

§ 391. **Элементарная работа ускорительныхъ силъ.** Элементарная работа ускорительныхъ силъ получится, если въ общесъ выраженіе элементарной работы $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, данное въ § 67-мъ, подставимъ вмѣсто X, Y, Z , произведенія массъ на ускоренія и возьмемъ сумму этихъ произведеній для всѣхъ точекъ системы. Получимъ:

$$\Sigma m (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) \dots \dots \dots (1112)$$

гдѣ двойными значками отмѣчены вторыя производныя координатъ по времени, такъ что напримѣръ $x'' = \frac{d^2 x}{dt^2}$.

Элементарная работа на пути возможныхъ перемѣщеній, произведенныхъ измѣненіемъ координаты q будетъ:

$$\Sigma m \left(x \frac{\partial x}{\partial q} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \delta q_1 \dots \dots \dots (1113)$$

Не трудно видѣть, что это выраженіе равно

$$\left[\frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q_1} + \dots \right) - \Sigma m \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} + \dots \right) \right] \delta q_1 = \text{элемент. раб.} \dots (1114)$$

Изъ (1109) находимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \Sigma m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q_1} + \dots \right) \dots \dots \dots (1115)$$

Взявъ частную производную по q отъ (1110) находимъ $\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}$.

Слѣдовательно изъ (1115) получимъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 = \Sigma m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots \right) \delta q_1 \dots \dots (1116)$$

Съ другой стороны, взявъ отъ (1109) частную производную по q_1 , найдемъ:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \Sigma m \left(x \frac{\partial x'}{\partial q_1} + y \frac{\partial y}{\partial q_1} + \dots \right) \dots \dots \dots (1117)$$

Дифф-ируя же (1116) по q_1 , получимъ.

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial q_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q_2' + \dots = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_1} \dots (1118)$$

Поэтому

$$\Sigma m \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \dots \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} \dots \dots \dots (1119)$$

Изъ (1114), (1116) и (1119) находятъ:

$$\text{элемент. работ. ускор. силы} = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i \dots (1120)$$

Замѣтимъ, что здѣсь мы брали частныя производныя только по q_i , такъ что опредѣлили ту элементарную работу ускорительныхъ силъ, которую онѣ производятъ на пути только тѣхъ возможныхъ перемѣщеній, которыя происходятъ отъ измѣненія только одной изъ независимыхъ координатъ, именно—отъ измѣненія координаты q_i .

§ 392. Уравненія Лагранжа во 2-ой формѣ. Пусть сплoвая функция для рассматриваемой системы есть I . Она должна быть функциею координатъ q_1, q_2, \dots, q_k и времени t . Тогда по ст. § 133 элементарная работа *активныхъ* силъ, на пути возможныхъ перемѣщеній, произведенныхъ измѣненіемъ координаты q_i , должна быть равна $\frac{\partial I}{\partial q_i} \delta q_i$. Эта работа, на основаніи начала Даламбера (§ 74), должна быть равна опредѣленной въ предыдущемъ параграфѣ элементарной работѣ *инертныхъ* силъ. Следовательно:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial I}{\partial q_i} \dots \dots \dots (1121)$$

Для каждой изъ независимыхъ координатъ q_1, q_2, \dots, q_k получимъ такое уравненіе. Всего будетъ k уравненій

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_1'} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \frac{\partial I}{\partial q_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_2'} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= \frac{\partial I}{\partial q_2} \\ \dots &\dots \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k'} - \frac{\partial T}{\partial q_k} &= \frac{\partial I}{\partial q_k} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1122)$$

Эти уравненія и называются лагранжевыми уравненіями во 2-ой формѣ. Они удобны, потому что содержатъ меньшее число координатъ чѣмъ уравненія (284), и кромѣ того избавляютъ отъ дальнѣйшихъ работъ о связяхъ.

Если положить:

$$U + T = L \dots \dots \dots (1123)$$

то эти уравненія можно представить въ еще болѣе простѣй формѣ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_1'} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k'} - \frac{\partial L}{\partial q_k} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1424)$$

Функция L называется функциею Лагранжа.

§ 393. Движеніе тяжелой точки по сферѣ. Какъ примѣръ на примѣненіе лагранжевыхъ уравненій во 2-ой формѣ къ частнымъ вопросамъ изслѣдуемъ движеніе тяжелой точки по сферѣ.

Примемъ за независимыя координаты долготу ψ и дополненіе θ до широты, такъ что:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \psi \\ y &= r \sin \theta \sin \psi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (1125)$$

Если обозначимъ чрезъ T живую силу и чрезъ $\Theta \delta \theta + \Psi \delta \psi$ работу силы тяжести, то уравненія (1122) дадутъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \theta} - \Theta &= 0 \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi} - \Psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1126)$$

Но

$$T = r^2 d\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\dot{\psi}^2$$

или

$$T = \frac{1}{2} \left(r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\psi}^2 \right) \quad (1127)$$

Слѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{d\theta} &= r^2 \dot{\theta}; & \frac{dT}{d\psi} &= r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\psi} \\ \frac{dT}{d\theta} &= r \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \dot{\psi}^2; & \frac{dT}{d\psi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1128)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta \delta \theta + \Psi \delta \psi &= g \delta z = -rg \cdot \sin \theta \cdot \delta \theta \\ \Theta &= -rg \cdot \sin \theta \\ \Psi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1129)$$

Поэтому уравненія (1126) принимаютъ видъ

$$\left. \begin{aligned} r \frac{d^2 \theta}{dt^2} - r \sin \theta \cdot \cos \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + g \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \sin^2 \theta \cdot \frac{d\psi}{dt} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (1130)$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ:

$$r^2 \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = c, \quad . \quad . \quad . \quad (1131)$$

гдѣ c постоянная интеграціи.

1-ое изъ уравненій (1130) вмѣстѣ съ (1131) даютъ:

$$r \frac{d^2 \theta}{dt^2} - \frac{c^2}{r \sin^3 \theta} + g \sin \theta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1132)$$

Помноживъ это уравненіе на dt и интегрируя, получимъ:

$$\frac{1}{2} r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{c^2}{2r^2 \sin^2 \theta} - q \cos \theta = a \quad (1133)$$

гдѣ a постоянная интеграціи.

Интегрируя (1133), получимъ:

$$t = \int \frac{-r^2 \sin \theta \cdot d\theta}{c + 2qr^2 \sin^2 \theta \cdot \cos \theta + 2r^2 \cdot a \cdot \sin^3 \theta} \quad (1134)$$

Полагая здѣсь $r \cos \theta = z$, получимъ:

$$t = \int \frac{r dz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(2ar + 2qr - c^2)}} \quad (1135)$$

Корни многочлена, стоящаго подъ радикаломъ того выраженія, всѣ действительные, потому что этотъ многочленъ отрицателенъ при $z = +r$, но положителенъ при $z = -\infty$; следовательно между $-\infty$ и $-r$ находится одинъ изъ корней, между $+r$ и $-\infty$ существуетъ еще корень; следовательно и третій корень действителенъ (потому что при двухъ действительныхъ корняхъ кубическаго уравненія и третій действителенъ). Поэтому (1135) можетъ быть представлено въ видѣ:

$$t = \int \frac{r dz}{\sqrt{2g(z-\alpha)(\beta-z)(\gamma-z)}} \quad (1136)$$

гдѣ α, β, γ суть упомянутые корни многочлена. Полагая

$$\left. \begin{aligned} z &= \alpha - (\beta - \alpha) \xi^2 \\ dz &= -2(\beta - \alpha) \xi d\xi \end{aligned} \right\} \quad (1137)$$

получимъ:

$$t = \int \frac{2r d\xi}{\sqrt{2g(\alpha - \gamma)(1 - \xi^2) \left(1 - \frac{\beta - \alpha}{\alpha - \gamma} \xi^2 \right)}} \quad (1138)$$

Если $\alpha > \gamma > \beta$, то $\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \gamma}$ положительна и < 1 . Полагая

$$\left. \begin{aligned} \frac{2r}{\sqrt{2g(\alpha - \gamma)}} &= \frac{1}{k} \\ \frac{\beta - \alpha}{\alpha - \gamma} &= k^2 \end{aligned} \right\} \quad (1139)$$

получимъ:

$$kt = \int \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}} \quad (1140)$$

Полагая $\xi = \sin \varphi$, гдѣ φ новое вводимое нами переменное, получимъ:

$$kt = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1141)$$

Сравнивая съ (629) и припоминая сказанное въ § 277-омъ видимъ, что μt выражается чрезъ φ эллиптическимъ интеграломъ и что

$$\sin \varphi = \sin \operatorname{am} (\mu t).$$

Слѣдовательно:

$$\xi = \sin \varphi = \sin \operatorname{am} (\mu t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1142)$$

Затѣмъ, согласно съ (1137):

$$r \cdot \cos \theta = a \quad (a - \beta) [\sin \operatorname{am} (\mu t)]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1143)$$

Изъ (1131) получимъ:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{c}{r^2 \sin \theta} = \frac{c}{r^2 (a - \beta) [\sin \operatorname{am} (\mu t)]^2} \\ \psi &= \int \frac{c}{r^2 (a - \beta)^2 [\sin \operatorname{am} (\mu t)]^2} dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1144) \end{aligned}$$

Этотъ интегралъ выражается помощью якобевской тета-функции.

Если положимъ $ds = 0$, то $\theta = \text{const}$:

$$\begin{aligned} r \cdot \cos \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 &= g \\ \psi &= \int \frac{dt}{\sin \theta} + \psi_0 \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{q}{r \cdot \cos \theta} \end{aligned}$$

ГЛАВА II.

Каноническія уравненія механики.

§ 394. Взаимныя функции. Положимъ, что имѣемъ функцию T_1 переменныхъ q_1, q_2, q_3, \dots . Примемъ слѣдующія обозначения:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1} = p_1; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = p_2; \quad \frac{\partial T}{\partial q_3} = p_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1145)$$

Каждая изъ частныхъ производныхъ, стоящихъ въ лѣвыхъ частяхъ этихъ уравненій, представляетъ собою, очевидно, тоже функцию отъ переменныхъ q_1, q_2, q_3, \dots , самихъ же такихъ уравненій имѣется ровно столько же, сколько этихъ переменныхъ. Слѣдовательно эти уравненія даютъ возможность выразить каждое изъ переменныхъ q_1, q_2, q_3, \dots чрезъ p_1, p_2, p_3, \dots .

Положимъ, что имѣется другая функция T_2 , определяемая уравненіемъ:

$$T_2 = -T_1 + p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1146)$$

Опредѣливъ, какъ выше было указано, q_1', q_2' черезъ p_1, p_2, \dots можемъ исключить изъ T_2 всѣ q_1', q_2', \dots и выразить T_2 въ видѣ функции только переменныхъ p_1, p_2, p_3, \dots . Изъ (1146) слѣдуетъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = q_1'; \quad \frac{\partial T_2}{\partial p_2} = q_2' \dots \dots \dots (1147)$$

Функция T_1 можетъ содержать еще и другія переменныя, напримѣръ, такія q_1, q_2, q_3 . Тогда и T_2 содержитъ эти переменныя. Докажемъ, что въ такомъ случаѣ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial q_2} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_2} \dots \dots \dots (1148)$$

Возьмемъ для доказательства полный дифференціалъ отъ T_2 . Согласно съ (1146) получимъ.

$$dT_2 = \frac{\partial T_2}{\partial q_1} dq_1 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial p_1} + p_1 \right) dp_1 + q_1 dp_1 + \dots \dots \dots (1149)$$

Вслѣдствіе (1145) заключенная въ скобки часть въ (1149) равна нулю.

Если выразимъ T_2 только въ переменныхъ $q_1, p_1, q_2, p_2, \dots$ (но не въ переменныхъ $q_1, q_2, \dots, q_1', q_2', \dots$), то:

$$dT_2 = \frac{\partial T_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial T_2}{\partial p_1} dp_1 + \dots \dots \dots (1150)$$

Сравнивая (1150) съ (1149), получимъ.

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_1} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial q_2} = -\frac{\partial T_1}{\partial q_2} \dots \dots \dots (1151)$$

что и требовалось доказать. Изъ (1150) и (1149) видно кромѣ того, что:

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = q_1'; \quad \frac{\partial T_2}{\partial p_2} = q_2' \dots \dots \dots (1152)$$

Функции T_1 и T_2 называются взаимными. Взаимность ихъ видна изъ сопоставленія уравненій (1145) и (1147); T_2 находится по T_1 исключеніемъ, при помощи уравненій (1145) переменныхъ q_1', q_2', \dots . Наоборотъ T_1 находится по T_2 исключеніемъ переменныхъ p_1, p_2, p_3, \dots при помощи уравненій (1147). T_1 есть функция переменныхъ $q_1, q_2, \dots, q_1, q_2, \dots$. Тогда какъ T_2 есть функция переменныхъ $q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots$.

§ 395. Случай, въ которомъ T есть однородная функция второго порядка. Если T_1 есть однородная функция 2-го порядка относительно переменныхъ q_1', q_2', \dots , то, по теоремѣ Эйлера объ однородныхъ функцияхъ, сумма произведеній частныхъ производныхъ однородной функции на соответствующія переменныя равна произведенію самой функции на показатель однородности. Въ данномъ случаѣ слѣдовательно:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T_1}{\partial q_2'} q_2' + \dots = 2T_1 \dots \dots \dots (1153)$$

или, благодаря уравнениям (1145):

$$p_1 q_1' + p_2 q_2' + \dots = 2T_1 \quad . \quad . \quad . \quad (1154)$$

Поэтому въ этомъ случаѣ, сообразуясь съ (1146), получимъ.

$$T_2 = T_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1155)$$

Только каждая изъ этихъ функций выражена въ своихъ переменныхъ, по тому что мы всегда разсматриваемъ T_1 какъ функцию, изъ которой исключены p_1, p_2, p_3 , тогда какъ разсматриваемъ T_2 какъ функцию, изъ которой исключены $q_1', q_2' \dots$. При этомъ T_2 окажется однородною функциею второго порядка отъ $p_1, p_2, p_3 \dots$.

Примѣръ 1-ый. Положимъ, что T_1 неоднородная функция заданная такъ

$$T_1 = q_1'^3 + q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1156)$$

Найти функцию T_2 и показать, что на этомъ примѣрѣ выполняются уравненія (1151) и (1152). Изъ (1156) имѣемъ:

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1} = p_1 = 2q_1' \dots \dots \dots (1157)$$

Вычисляя по формулѣ (1146) функцию T_2 получимъ:

$$T_2 = -q_1'^3 - q_1 + p_1 q_1'.$$

Исключая отсюда q_1' помощью найденнаго соотношенія (1157) имѣемъ.

$$T_2 = -\frac{1}{4} p_1^3 - q_1 + \frac{1}{2} p_1^2 - \frac{1}{4} p_1 - q_1 \dots \dots (1158)$$

Отсюда

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = \frac{p_1}{2}$$

или, на основаніи (1157)

$$\frac{\partial T_2}{\partial p_1} = q_1' \dots \dots \dots (1159)$$

Слѣдовательно уравненіе (1152) выполнялось. Изъ (1158) и (1156) имѣемъ:

$$\frac{\partial T_2}{\partial q_1} = -1; \quad \frac{\partial T_1}{\partial q_1} = +1.$$

Слѣдовательно и уравненіе (1151) выполняется.

Примѣръ 2-ой. Дана $T_1 = q_1'^4 + q_1' q_2'$, такъ что T_1 выражается однородною функциею 2-го порядка чрезъ q_1', q_2' . Найти сопряженную ей функцию T_2 и показать, что она будетъ однородною 2-го порядка относительно p_1, p_2 .

По (1146) имѣемъ:

$$T_2 = -q_1'^3 - q_1' q_2' + (2q_1' + q_2') q_1' + q_1 q_2' - q_1'^4 + q_1' q_2'. \quad (1160)$$

Слѣдовательно $T_2 = T_1$ согласно съ (1155).

Изъ выраженія, которымъ задана T_1 имѣемъ.

$$p_1 = \frac{\partial T_1}{\partial q'_1} = 2q'_1 + q' \dots \dots \dots (1161)$$

$$p_2 = \frac{\partial T_1}{\partial q'_2} = q'_1 \dots \dots \dots (1162)$$

Опредѣляя отсюда q' и q_2 чрезъ p_1, p_2 и вставивъ въ (1160) получимъ:

$$T_2 = p_2^2 + p_2 \cdot p_1 - 2p_1^2 - p_2 p_1 - p_2^2 \dots \dots (1163)$$

Итакъ, убѣждаемся, что T_2 выражается однородною функціею 2-го порядка чрезъ p_1, p_2 .

§ 396. Каноническія уравненія механики. Если дѣйствующія на систему силы (внутреннія и вѣшнія) имѣютъ потенциалъ U , то, получаются Лагранжевы уравненія (1124) въ видѣ

$$\dots \dots \dots \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q} \dots \dots \dots (1164)$$

При этомъ $L = T + U$. Если H есть функция взаимная съ L , то, согласно съ § 394:

$$p = \frac{\partial L}{\partial q'} \dots \dots \dots (1165)$$

Но U не содержитъ производныхъ q . Слѣдовательно:

$$p = \frac{\partial L}{\partial p'} = \frac{\partial T}{\partial q'} \dots \dots \dots (1166)$$

На основаніи (1152) имѣемъ $i' = \frac{\partial H}{\partial p'}$. На основаніи же (1166) и (1164) имѣемъ:

$$p' = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q} \dots \dots \dots (1167)$$

Затѣмъ, согласно съ (1151), имѣемъ:

$$p' = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} = \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial H}{\partial q} \dots \dots \dots (1168)$$

Такимъ образомъ для каждой независимой координаты получимъ, вмѣсто Лагранжевыхъ, слѣдующія каноническія уравненія:

$$q' = \frac{\partial H}{\partial p'} \quad p' = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

Всего получимъ $2k$ слѣдующихъ уравненій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_1} &= q'_1; & -\frac{\partial H}{\partial q_1} &= p_1 \\ \frac{\partial H}{\partial p_2} &= q'_2; & -\frac{\partial H}{\partial q_2} &= p_2 \\ & \dots & & \dots \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} &= q'_k; & -\frac{\partial H}{\partial q_k} &= p_k \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1169)$$

Это $2k$ уравненій и называются каноническими. Они были выведены Гамильтономъ. Функция H называется гамильтоновскою функциею.

Подставляя значенія величинъ p' и q получимъ каноническія уравненія въ наиболее употребительной формѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}; & \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}; & \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ & \dots & & \dots \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}; & \frac{dq_k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1170)$$

Чрезвычайно важно замѣтить, что если связи не зависятъ отъ времени, то согласно съ § 390, T есть однородная функция 2-го порядка отъ $q'_1, q'_2 \dots q'_k$, такъ что по теоремѣ Эйлера

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 + \dots = 2T \dots \dots \dots (1171)$$

Поэтому, на основаніи (1146) получимъ въ этомъ случаѣ:

$$H = T - U \dots \dots \dots (1172)$$

Лагранжъ привелъ всю механику къ теоріи дифференціальнымъ уравненій (1122). Якоби показалъ, что интегрированіе уравненій механики удобнѣе производится, когда они представлены въ канонической формѣ (1170). Со времени Якоби главнымъ предметомъ *аналитической механики* является теорія интегрированія каноническихъ уравненій, совпадающая какъ показалъ Якоби съ интегрированіемъ уравненій съ частными производными 1-го порядка.

ЗАДАЧИ.

Отдѣлъ I. — Глава I.

1) Написать уравнение равноѣрно-прямолинейнаго движенія, если точка проходитъ 5 сантиметровъ въ секунду и время считается отъ того момента, когда точка находилась на разстояніи 2 метровъ отъ начала координатъ.

2) Найти скорость въ прямолинейномъ движеніи, опредѣляемомъ уравненіемъ $x = \sin t + \cos t$.

3) Найти скорость въ движеніи, опредѣляемомъ уравненіемъ

$$x = \sin(at) + b.$$

4) Найти скорость въ движеніи, опредѣляемомъ уравненіемъ

$$x = \sqrt{at + b}.$$

5) Найти ускоренія въ движеніяхъ, данныхъ въ задачахъ 2, 3 и 4.

6) Найти силы, подъ влияніемъ которыхъ происходятъ движенія, заданныя на задачахъ 2, 3 и 4.

7) Исследовать движеніе, заданное дифференціальнымъ уравненіемъ $X = at + b$

8) Исследовать движеніе точки, брошенной вверхъ въ воздухъ, принимая, что сопротивленіе воздуха пропорціоально квадрату скорости.

9) Исследовать прямолинейное движеніе точки, притягиваемой къ началу координатъ съ силою обратно-пропорціоальною квадрату разстоянія ея отъ начала.

Отдѣлъ I. — Глава II.

10) Опредѣлить траекторію и скорость въ движеніи, заданномъ уравненіями: $x = a_1t + b_1$; $y = a_2t + b_2$; $z = a_3t + b_3$.

11) Опредѣлить скорость v въ движеніи точки, брошенной въ пустотѣ наклонно къ горизонту.

12) Опредѣлить скорость и ея направленіе, ускореніе и его направленіе въ движеніи, опредѣляемомъ уравненіями:

$$x = A \cos(kt) + B \sin(kt)$$

$$y = A' \cos(kt) + B' \sin(kt).$$

13) Определить тангенциальное и нормальное ускорения въ движеніи, заданномъ въ задачѣ 12-ой.

Отдѣлъ I. — Глава III.

14) Определить равнодѣйствующую R силъ P_1 и P_2 дѣйствующихъ на свободную точку и составляющихъ между собою уголъ θ .

15) На свободную точку, помѣщенную въ началѣ координатъ, дѣйствуютъ: силы P_1 и P_2 , составляющія съ осью OX углы α_1 и α_2 . Определить уголъ ϕ , составленный съ осью OX равнодѣйствующею R .

16) Силы P и Q дѣйствующія на точку, составляютъ уголъ α , равнодѣйствующая ихъ равна R . Показать, что, при увеличеніи каждой изъ составляющихъ силъ на R , новая равнодѣйствующая составитъ съ прежнею уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\frac{P+Q}{R} \sin \alpha$.

17) Равнодѣйствующая силъ P и Q равна R . Силы заданы такъ, что при удвоеніи Q сила R удвоится, при дѣйствіи Q въ обратномъ направленіи R тоже удвоится. Показать, что при такихъ условіяхъ $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$.

Отдѣлъ II. — Глава II.

18) Дано приведеніе силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло, къ точкѣ O , при чемъ предложенія равнодѣйствующей R суть ΣX , ΣY , ΣZ и пролонгация наръ $L = \Sigma (Zy - Yz)$, $M = \Sigma (Xz - Zx)$, $N = \Sigma (Yx - Xy)$. Найти приведеніе къ точкѣ O' , координаты которой суть (ξ, η, ζ) .

19) Дано приведеніе ΣX , ΣY , ΣZ , L , M , N . Найти моментъ Γ динaмы равнодѣйствующей этихъ силъ и наръ и параметръ ρ этой динaмы.

20) По даннымъ задачи 18-й найти уравненіе оси динaмы.

21) Шесть равныхъ между собою силъ дѣйствуютъ по сторонамъ AB , BC , CA , DA , DB , DC правильнаго тетраэдра, показать, что ось равнодѣйствующей динaмы расположена по перпендикуляру, опущенному изъ D на ABC .

Отдѣлъ II. — Глава IV.

22) Палитра для красокъ имѣетъ форму диска радиуса a , въ которомъ сдѣлано эксцентричное круглое отверстіе радиуса b . Разстояніе между центрами диска и отверстія равно c . Найти центръ тяжести палитры.

23) Показать, что центръ тяжести площади треугольника совпадаетъ съ центромъ тяжести трехъ равныхъ матеріальныхъ точекъ, помѣщенныхъ въ срединахъ сторонъ.

24) Показать что центръ тяжести периметра треугольника ABC находится въ центрѣ круга вписаннаго въ треугольникъ DEF , гдѣ D , E , F суть середины сторонъ даннаго треугольника.

25) Показать, что центр тяжести дуги какой-либо кривой определяется координатами:

$$\bar{x} = \frac{\int x ds}{\int ds}; \quad \bar{y} = \frac{\int y ds}{\int ds}.$$

26) Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

лежащей между абсциссами $x = 0$ и $x = c$.

27) Обозначивъ чрезъ G центр тяжести дуги AP лемнискаты $r^2 = a^2 \cos(2\varphi)$, показать, что OG делит пополамъ уголъ AOI , принимая O за полюсъ полярныхъ координатъ.

28) Показать, что центр тяжести ортогональной проекции данной площади совпадаетъ съ проекцією центра тяжести данной площади.

29) Найти координаты центра тяжести кругового квадрата AOB , принимая радиусы OA и OB за оси координатъ.

30) Основываясь на задачахъ 28 и 29, показать, что координаты центра тяжести квадрата эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, суть $\bar{x} = \frac{4a}{\pi}$, $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$.

31) Показать, что расстояние центра тяжести половины площади эллипса, находящейся по одну сторону большей оси, отъ центра эллипса равно $\frac{4b}{3\pi}$.

32) Показать, что координаты центра тяжести какой-либо площади равны

$$\bar{x} = \frac{\int x dy}{\int y dx}; \quad \bar{y} = \frac{\int y^2 dx}{2 \int y dx}.$$

33) Основываясь на задачѣ 32, показать, что координаты площади, ограниченной параболою, ея осью ON и ординатою NP суть:

$$\bar{x} = \frac{3}{8} x, \quad \bar{y} = \frac{3}{8} y$$

34) Основываясь на теоремахъ Гюльдена-Паппуса, определить поверхность S и объемъ V гѣла, получаемого отъ вращения треугольника ABC около AB , если перпендикуляръ, опущенный изъ C на AB равенъ p .

$$BC = a; \quad AC = b, \quad AB = c.$$

35) Дуга S какой-либо кривой вращается около оси z , лежащей въ ея плоскости, на уголъ 2α ; показать, что координаты центра тяжести описанной дугою поверхности суть:

$$\bar{x} = \frac{\int x^2 ds}{\int x ds} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right), \quad \bar{z} = \frac{\int x z ds}{\int x ds}.$$

36) Ограниченная замкнутымъ контуромъ площадь σ , плоскость которой проходить черезъ ось z , вращается около оси z на уголъ 2α . Показать, что координаты центра тяжести объема, описаннаго площадью σ , суть:

$$\bar{x} = \frac{\int x^2 d\sigma}{\int x d\sigma} \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right), \quad \bar{z} = \frac{\int x z d\sigma}{\int x d\sigma}.$$

Отдѣлъ III. — Глава I.

37) Тонкая, прямая, гладкая трубка вращается въ горизонтальной плоскости съ такою угловою скоростью, что тангенсъ описаннаго трубкою угла пропорционаленъ времени. Определить движеніе тяжелой матеріальной точки, помѣщенной въ такой трубкѣ.

38) Основываясь на началѣ сохраненія движенія центра тяжести, показать, что ружье или пушка при выстрѣлѣ «отдають», то-есть получаютъ толчокъ въ сторону противоположную выстрѣлу.

39) Пользуясь началомъ сохраненія движенія центра тяжести и началомъ площадей, изслѣдовать движеніе брошенной тяжелой палки, пренебрегая сопротивленіемъ воздуха.

40) Показать, что въ сферическихъ координатахъ r, φ, λ

$$dU = \Sigma m (Rdr + \Phi r d\varphi + Lrd\lambda \sin \varphi),$$

гдѣ R = ускореніе, дѣйствующее въ направленіи r , Φ — ускореніе перпендикулярное къ r и лежащее въ плоскости меридіана, L — ускореніе перпендикулярное къ плоскости меридіана.

41) Определить разность работы, совершенной въ теченіе 5 минутъ машиною, дѣйствовавшею съ мощностью 100 паровыхъ лошадей и работы, совершенной въ теченіе 80 минутъ машиною, дѣйствовавшею съ мощностью 20 паровыхъ лошадей.

42) Определить въ тоннахъ сопротивленіе воды, преодолеваемое пароходомъ, который, работая съ мощностью 8000 паровыхъ лошадей («эффektivность»), то-есть за вычетомъ мощности идущей на преодоленіе другихъ (сопротивленій), идетъ со скоростью 32 километровъ въ часъ.

43) Палин, съ какою мощностью вертится равноѣрно колесо, если уравновѣшивается тормозящую силу, дѣйствующую по касательной равную P килогр., дѣлающъ n оборотовъ въ минуту, и радиусъ его равенъ r миллиметр.

44) Какой тормозящій моментъ уравновѣшиваетъ колесо, если вращается равноѣрно съ мощностью N паровыхъ лошадей, дѣлая n оборотовъ въ минуту.

45) Велосипедистъ, вѣсящій съ велосипедомъ 90 килограммъ, спускается, не дѣйствуя на педали, по дорогѣ, имѣющей уклонъ въ $\frac{1}{100}$, съ постоянною скоростью 13 км. метровъ въ часъ, преодолевая сопротивленія тренія и воздуха. Съ какою мощностью онъ долженъ работать, чтобы съ тою же постоянною скоростью ѣхать вверхъ по дорогѣ, имѣющей уклонъ въ $\frac{1}{200}$. Уклонъ въ $\frac{1}{a}$ обозначаетъ, что тангенсъ угла наклоненія дороги къ горизонту равенъ $\frac{1}{a}$.

Отдѣлъ IV. — Главы I, II, и III.

Показать справедливостъ слѣдующихъ формулъ, выражающихъ моменты инерціи.

46) Для прямой AB , относительно оси, проходящей чрезъ A и составляющей уголъ β съ AB , называя l длину прямой $J = \frac{l^2 \sin^2 \beta}{3} M$.

47) Для прямой, имѣющей длину $2a$, относительно перпендикулярной къ ней оси, не лежащей въ ея плоскости, если b есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ середины прямой на ось: $J = \frac{1}{3} (a^2 + b^2) M$.

48) Для дуги круга, относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости и проходящей чрезъ ея центръ тяжести, если r — радиусъ, c — хорда, a — длина дуги. $J = \frac{r^3}{a^2} (a^2 - c^2) M$.

49) Для дуги круга, относительно оси перпендикулярной къ ея плоскости и проходящей чрезъ ея середину, $J = \frac{2r^2}{a} (a - c) M$.

50) Для эллиптической пластинки, ограниченной эллипсомъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно оси $2b$ мы нашли въ 179-мъ параграфѣ $J = \frac{a^2}{4} M$.

51) Для эллиптической пластинки, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ ея центръ; $J = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) M$.

52) Для пластинки, имѣющей видъ равносторонняго треугольника относительно высоты, если $2b$ есть сторона $J = \frac{b^2}{6} M$.

53) Для треугольной пластинки, стороны которой суть a, b, c , относительно оси перпендикулярной къ пластинкѣ и проходящей чрезъ вершину противоположную сторонѣ a , $J = \frac{1}{12} (b^2 + 3c^2 - a^2) M$.

54) Для треугольной пластинки, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ центръ тяжести $J = \frac{1}{36} (a^2 + b^2 + c^2) M$.

55) Для пластинки имѣющей видъ параллелограмма, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ пересѣченія диагоналей, если $2a$ и $2b$ суть стороны, $J = \frac{a^2 + b^2}{3} M$.

56) Для пластинки, имѣющей видъ правильнаго многоугольника, относительно оси перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ центръ тяжести, если n — число сторонъ, c — длина стороны,

$$J = \frac{c^2 \left(2 + \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)}{12 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{n} \right) \right)} M$$

57) Для сферическаго слоя, заключеннаго между сферическими поверхностями радиусовъ a и b , относительно диаметра: $J = \frac{2(a^4 - b^4)}{5(a^2 - b^2)} M$.

58) Для прямого круглаго цилиндра, относительно оси, $J = \frac{R^2}{2} M$.

59) Для прямого круглаго цилиндра относительно оси перпендикулярной къ оси цилиндра и проходящей чрезъ ея середину, если a — радиусъ, $2b$ — высота, $J = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{3} \right) M$.

Отдѣлъ IV. — Глава IV.

60) Опредѣлить угловую скорость ω , съ которою равномерно вращается тѣло, совершающее n оборотовъ въ минуту.

61) Опредѣлить время колебанія куба около одного изъ реберъ расположеннаго горизонтально. Опредѣлить время колебанія того же куба около расположенной горизонтально диагонали одной изъ его граней. Показать что длина изохранныаго математическаго маятника въ первомъ случаѣ $\frac{4}{3}a$, во второмъ $\frac{5}{3}a$, если ребро куба равно $2a$.

62) Круговая дуга качается около перпендикулярной къ ея плоскости оси, проходящей чрезъ ея центръ. Показать, что время полнаго колебанія не зависитъ отъ длины качающейся дуги и что длина изохранныаго математическаго маятника равна двойному радиусу.

63) Опредѣлить ту изъ осей, лежащихъ въ плоскости эллиптической пластинки, около которой пластинка совершаетъ наиболѣе короткия колебанія.

64) Тонкая однородная палка качается около горизонтальной оси, проходящей чрезъ верхнй конецъ ея. Палку эту проводить въ горизонтальное положеніе и оставлять затѣмъ двигаться, не сообщая начальной скорости, подъ вліяніемъ тяжести. Показать, что когда горизонтальное дѣйствіе на ось будетъ наибольшимъ, то вертикальное дѣйствіе на ось отнесется къ вѣсу палки какъ 11 : 8.

Отдѣлъ IV. — Глава V.

65) Пластина AB прислонена верхнимъ концомъ B къ гладкой стѣнѣ, когда какъ нижній ея конецъ упирается о шероховатую горизонтальную плоскость. По истиницѣ перемѣщается грузъ, вѣсъ котораго въ n разъ болѣе вѣса пластины. Показать, что тренія въ A при равныхъ положеніяхъ груза относятся какъ $(2n + 1) : 1$.

66) Однородная балка проходитъ надъ однимъ и подъ другимъ горизонтальнымъ неподвижнымъ стержнемъ. Показать, что равновѣсіе балки возможно только въ томъ случаѣ, когда длина балки $> b \left| 1 + \frac{19}{12} \beta^2 \right|$, гдѣ b — разстояніе между стержнями, β — уголъ наклона къ горизонту этого разстоянія, μ — коэффициентъ тренія.

Отдѣлъ VI.

67) Показать, что двѣ равныя массы, сосредоточенныя въ точкахъ отстоящихъ одна отъ другой на разстояніи 1 сантиметра, притягиваются одна другою съ силою, равною одному дина, если каждая изъ массъ равна 3928 граммъ.

68) Показать, что два соприкасающихся оловянныхъ шара плотность которыхъ равна единицѣ и радиусъ которыхъ равенъ 43,3 сент., притягиваются съ силою, равною одному дина.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

1) $x = 5t + 200.$

2) $v = \cos t - \sin t.$

3) $t = a + \cos(at),$

4) $v = \frac{a}{2\sqrt{at+b}}$

5) $y = \sin t - \cos t; \quad y' = a^2 \sin(at), \quad y'' = \frac{a^2}{4(at+b)^{\frac{3}{2}}}$

6) $X = m(\sin t + \cos t); \quad X' = a^2 m \sin(at), \quad X'' = \frac{a^2 m}{4(at+b)^{\frac{3}{2}}}$

7) $v = \frac{a}{2m} t^2 + \frac{b}{m} t + c_1 = \frac{a}{6m} t^3 + \frac{b}{2m} t^2 + c_1 t + c_2$, гдѣ c_1 и c_2

постоянныя интегралы.

8) На точку дѣйствуетъ тяжесть и сопротивление, которое можно выразить чрезъ mgk^2v^2 . Получимъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(1 + k^2v^2); \quad \frac{dv}{dt} = -g(1 + k^2v^2);$$

$$kgt = \operatorname{arctg}(kv_0) - \operatorname{arctg}(kv) = \operatorname{arctg}\left(\frac{k(v_0 - v)}{1 + kv_0v}\right), \quad v = \frac{kv_0 - \operatorname{tg}(kgt)}{1 + k^2v_0^2 \operatorname{tg}^2(kgt)};$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \left[\frac{kv_0 \cos(kgt) - \sin(kgt)}{\cos(kgt) + kv_0 \sin(kgt)} \right]; \quad k^2gx = \operatorname{tg}[\cos(kgt) + kv_0 \sin(kgt)].$$

9) $m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^2}$. Помноживъ обѣ части на $2 \frac{dx}{dt}$ и интегрируя получимъ

$$mv^2 = mv_0^2 - 2 \int \frac{k dx}{x^2} = 2k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right)$$

Здѣсь v_0 скорость на разстояніи x_0 отъ начала. Если точка начинаетъ движеніе, выходя изъ покоя въ то время, когда она находилась на разстояніи a отъ начала, то:

$$x_0 = a; \quad v_0 = 0; \quad mv^2 = 2k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right) = \frac{2k}{a} \frac{(a-x)}{x};$$

$$v = \sqrt{\frac{2k}{ma} \left(\frac{a-r}{x} \right)}; dt = \sqrt{\frac{ma}{2k}} \cdot \sqrt{\frac{x}{a-x}} \cdot dx,$$

$$t - t_0 = \frac{a}{2} \int \frac{ma}{ka} \arccos \left(\frac{a-2x}{a} \right) + \int \frac{ma}{2k} \sqrt{\frac{x}{a-x}} \cdot dx.$$

$$10) \quad \frac{x-b_1}{a_1} = \frac{z-b_3}{a_3} = \frac{y-b_2}{a_2}; \quad r = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

$$11) \quad v = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \varphi + (v_0 \sin \varphi - gt)^2}.$$

$$12) \quad \frac{dx}{dt} = -kA \sin(kt) + kB \cdot \cos(kt); \quad \frac{dy}{dt} = -kA' \sin(kt) + \\ + kB' \cdot \cos(kt);$$

$$v = \sqrt{[-kA \sin(kt) + kB \cos(kt)]^2 + [-kA' \sin(kt) + kB' \cos(kt)]^2}$$

$$\cos(r, x) = \frac{-A \sin(kt) + B \cos(kt)}{\sqrt{[-A \sin(kt) + B \cos(kt)]^2 + [-A' \sin(kt) + B' \cos(kt)]^2}},$$

$$\cos(v, y) = \frac{-A' \sin(kt) + B' \cos(kt)}{\sqrt{[-A \sin(kt) + B \cos(kt)]^2 + [-A' \sin(kt) + B' \cos(kt)]^2}},$$

$$\operatorname{tg}(r, x) = \frac{B' \cos(kt) - A' \sin(kt)}{B \cos(kt) - A \sin(kt)}$$

$$J = \sqrt{k^4 [A \cos(kt) + B \sin(kt)]^2 + k^4 [A' \cos(kt) + B' \sin(kt)]^2}$$

$$J = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos(j, x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(j, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

13) См. задачу (11):

$$\frac{dt}{dt} = \frac{(gt - v_0 \sin \varphi) g}{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \varphi + (v_0 \sin \varphi - gt)^2}}$$

Из § 52 знаем, что траектория есть парабола $x_1^2 = 2px_1$, в которой $2p = \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi}{g}$. Радиус кривизны параболы равен

$$\rho = \frac{(x^2 + p)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

Нормальное ускорение равно:

$$\frac{v^3}{\rho} = \frac{[v_0^2 \cos^2 \varphi + (v_0 \sin \varphi - gt)^2] p^{\frac{3}{2}}}{(x^2 + p)^{\frac{3}{2}}}$$

14) Из треугольника сил имеем $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \theta}$.

15) $X = P \cos \alpha_1 + P_1 \cos \alpha_1$; $Y = P \sin \alpha_1 + P_1 \sin \alpha_1$; $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X}$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2}{P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2}$$

18) Равнодійствующая останется та же по величинѣ и направленію, но приложена уже въ O' . Проложенія пары получаются другія, а именно:

$$L' = \Sigma [(y - \eta) Z - (z - \zeta) Y] = L - \eta \Sigma Z + \zeta \Sigma Y$$

$$M' = \Sigma [(z - \zeta) X - (x - \xi) Z] = M - \zeta \Sigma X + \xi \Sigma Z$$

$$N' = \Sigma [(x - \xi) Y - (y - \eta) X] = N - \xi \Sigma Y + \eta \Sigma X$$

19) Ось динамы называется также центральной осью. Пусть l, m, n суть косинусы наклоненія центральной оси. Имѣемъ

$$l = \frac{\Sigma X}{R}; \quad m = \frac{\Sigma Y}{R}; \quad n = \frac{\Sigma Z}{R},$$

гдѣ R —равнодійствующая сила $\Sigma X, \Sigma Y$ и ΣZ . Если обозначимъ чрезъ G моментъ, равнодійствующій моментамъ L, M, N , чрезъ θ уголъ составляемый моментами Γ и G , то:

$$\Gamma = G \cos \theta = Ll + Mm + Nn.$$

Отсюда:

$$\Gamma R = L \Sigma X + M \Sigma Y + N \Sigma Z$$

$$\text{или} \quad \frac{\Gamma}{R} = \frac{L \Sigma X + M \Sigma Y + N \Sigma Z}{R^2}.$$

$$20) \quad \frac{L}{\Sigma X} = \frac{\eta \Sigma Z + \zeta \Sigma Y}{\Sigma X} = \frac{M}{\Sigma Y} = \frac{\zeta \Sigma X + \xi \Sigma Z}{\Sigma Y} = \frac{N}{\Sigma Z} = \frac{\xi \Sigma Y + \eta \Sigma X}{\Sigma Z};$$

гдѣ (ξ, η, ζ) суть координаты точекъ оси динамы.

22) Пусть O —центръ диска, C —центръ отверстія. Принимая OC за ось xy совъ, получимъ:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} = \frac{\pi a^2 \cdot o - \pi b^2 \cdot c}{\pi a^2 - \pi b^2} = \frac{b^2 c}{a^2 - b^2}.$$

Здѣсь мы считаемъ массу вынутаго изъ отверстія матеріала отрицательною

$$26) \quad x = x_s = \frac{c(y - c)}{s}; \quad y = \frac{1}{2} \left(y + \frac{cx}{s} \right) \quad \text{Можно показать, что } x$$

равенъ абсциссѣ точки Γ , въ которой пересѣкаются касательныя, проведенныя въ концахъ изслѣдуемой дуги цѣиной линіи, и что y равно половинѣ ординаты точки N , въ которой пересѣкаются нормали, проведенныя въ концахъ дуги.

$$29) \quad x = \frac{4r}{3\pi}; \quad y = \frac{4r}{3\pi}.$$

$$34) \quad s = \pi(a + b)p; \quad v = \frac{\pi}{3} ep^2.$$

37) Уравненіе трубки таково:

$$y = kx - t; \quad X = 0, \quad Y = 0.$$

Въ формулѣ Лагранжа (277) достаточно разсматривать только

$$x \text{ и } y, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = kt \frac{\partial x}{\partial t}$$

Формула (278) даетъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + kt \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Уравненіе трубки даетъ:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = kt \frac{d^2 x}{dt^2} + 2k \frac{dx}{dt}.$$

Исключая $\frac{d^2 y}{dt^2}$, получимъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} = - \frac{2k^2 t}{1 + k^2 t^2}.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\lg \left(\frac{dx}{dt} \right) + \lg (1 + k^2 t^2) = \text{const.}$$

Если обозначимъ чрезъ β начальную скорость точки по трубкѣ, то:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\beta dt}{1 + k^2 t^2}.$$

Если a есть начальное значеніе координаты x , то:

$$x = a + \frac{\beta}{k} \operatorname{arctg} (kt), \quad y = akt + \beta t \operatorname{arctg} (kt).$$

Если r, φ суть полярныя координаты, полярная ось которыхъ направлена по начальному положенію трубки, то

$$x = a + \frac{\beta}{k} \varphi; \quad y = \left(a + \frac{\beta}{k} \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

Траекторія будетъ

$$r = \frac{ak + \beta \varphi}{k \cos \varphi}.$$

39) Центр тяжести палки описываетъ параболу. Проведемъ чрезъ центр тяжести оси координатъ Gx, Gy, Gz постояннаго направленія. Моменты вѣншей силы (тяжести) по отношенію къ каждой изъ этихъ осей равны нулю, потому что всѣ силы тяжести, дѣйствующія на точки палки приводятся къ одной равнодѣйствующей. Поэтому получимъ интегралы площадей (323). Пусть p есть точка палки, помѣщенная на единицу разстоянія отъ центра тяжести и пусть координаты ея относительно осей Gx, Gy, Gz суть a, b, c . Если r есть разстояніе какой-либо точки палки отъ центра тяжести и если палку принять за прямую линію, то координаты точки m будутъ $x = ra, y = rb; z = rc$ такъ что

$$\frac{dx}{dt} = r \frac{da}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = r \frac{db}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} = r \frac{dc}{dt}.$$

Уравнения (323) дадутъ:

$$\left(b \frac{dc}{dt} - c \frac{db}{dt} \right) \Sigma m r^2 = c \cdot \left(c \frac{da}{dt} - a \frac{dc}{dt} \right) \Sigma m r^2 = c ;$$

$$\left(a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt} \right) \Sigma m r^2 = c .$$

Помноживъ эти уравнения соответственно на a , b , c и сложивъ, получимъ $c_1 a + c_2 b + c_3 c = 0$. Слѣдовательно точка p находится постоянно въ плоскости неподвижной по отношенію къ подвижнымъ осямъ Gx , Gy , Gz . Вращеніе палки происходитъ въ этой плоскости около G . Такъ какъ законъ площадей остается вѣрнымъ и для этой плоскости, то вращеніе палки равномерное. Движеніе палки состоитъ, слѣдовательно, изъ параболическаго движенія центра тяжести и изъ равномернаго вращенія около него палки въ плоскости, проходящей чрезъ него и остающейся параллельною въ некоторой неподвижной плоскости, направленіе которой зависитъ отъ того, какъ была брошена палка.

40) Такъ какъ $dU = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$ — элементарной работы, то вообще для всякихъ координатъ dU равно суммѣ элементарныхъ работъ силъ. Въ сферическихъ координатахъ r , φ , λ точки приложенія силъ mR , $m\psi$, mL проходятъ по направленію этихъ силъ, соответственно, пути dr , $r d\varphi$, $r \sin \varphi d\lambda$. Слѣдовательно

$$dU = \Sigma m (R dr + \psi r d\varphi + L r \sin \varphi \cdot d\lambda).$$

41) Работа, совершенная первою машиною, равна 2250000 килограммтр. Работа, совершенная второю машиною равна 7200000 к. Искомая разность равна 4950000 килограммтр. Слабая машина сдѣлала больше работы, потому что работала долѣе.

42) Мощность въ килограммтрахъ равна здѣсь произведенію пути, пройденному въ секунду, на силу уравновѣшивающую сопротивленіе воды, то есть $v \cdot P$, гдѣ v скорость въ секунду, P сопротивленіе въ килограммахъ. Если N мощности въ паровыхъ лошадяхъ, то $P = \frac{v \cdot 75}{c}$

$$v = \frac{32000}{3600} \left[\begin{array}{l} \text{метр.} \\ \text{секунд.} \end{array} \right]$$

$$P = \frac{8000 \cdot 75 \cdot 3600}{32000} \text{ килотр.} = \frac{8000 \cdot 75 \cdot 3600}{32000 \cdot 1000} \text{ тоннъ} = 67,5 \text{ тоннъ.}$$

43) За одинъ оборотъ точка окружности колеса проходить $\frac{2\pi r}{1000}$ метровъ, за n оборотовъ она проходить $\frac{2\pi r}{1000} n$ метровъ, въ секунду она проходить $\frac{2\pi r}{1000} \frac{n}{60}$ метровъ. Работа, совершаемая колесомъ въ секунду равна $\frac{2\pi r}{1000} \frac{n}{60} \frac{P}{60}$ килограммтр. Мощность N въ паровыхъ лошадяхъ равна $N = \frac{2\pi r}{1000} \frac{n}{60} \frac{P}{75}$

41) Искомый момент M равен $\frac{P \cdot r}{1000}$, если радиус колеса выраженъ въ миллиметрахъ. P выражено въ килограммахъ и за единицу момента принимаемъ моментъ, производимый силою равною вѣсу одного килограмма, дѣйствующею на плечо въ 1 метръ. Поэтому, согласно съ задачею 43, искомый моментъ опредѣлится изъ формулы $N = \frac{2\pi \cdot M}{60 \cdot 75}$

45) Такъ какъ уголъ наклоненія дороги къ горизонту въ обоихъ случаяхъ очень малъ, то можно принять, что уклонъ равенъ его синусу, то есть, что проѣзжая какой либо путь по уклону въ $\frac{1}{100}$ велосипедистъ поднимается въ вертикальномъ направленіи на $\frac{1}{100}$ этого пути. Спускаясь, велосипедистъ не дѣйствуетъ на педали: следовательно для равномернаго движенія должно существовать равенство работы силы тяжести съ работою сопротивленій. Поэтому мощность сопротивл. — $\frac{13000 \cdot 90}{3600 \cdot 100}$ килограмметр въ секунду. Чтобы подниматься равномернымъ движеніемъ велосипедистъ долженъ производить работу равную суммѣ работъ сопротивленія и тяжести. Поэтому искомая мощность N велосипедиста при поднятіи равна:

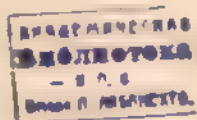
$$N = \frac{90 \cdot 13000}{3600 \cdot 100} + \frac{13000 \cdot 90}{3600 \cdot 100} = \frac{39}{8} \text{ килограмметр. въ секунду.}$$

или

$$N = \frac{39}{8 \cdot 75} = 0,65 \text{ паровыхъ лошадей.}$$

$$60) \quad \omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} \text{ — го. Отсюда } \omega = \frac{2\pi}{60}.$$

63) Искомая ось параллельна большой оси эллипса и дѣлитъ малую полуось пополамъ.



Н. Делоне.



BRITISH MUSEUM
LIBRARY
1851
1852

42

